



ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

- 1 -

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σελ 133

A2. Θεωρία σελ 51

A3. Θεωρία σελ 185

A4. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Για να ορίζεται η $\log$ πρέπει

$$\begin{cases} x \in D_g \\ \text{και} \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \text{και} \\ \sqrt{x-2} + 1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \text{και} \\ \sqrt{x-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \text{και} \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2, +\infty)$$

Άρα η $h = \log$ ορίζεται στο $D_h = (2, +\infty)$ με τύπο

$$\begin{aligned} h(x) &= (\log)(x) = f(g(x)) = 2 \ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = 2 \ln \sqrt{x-2} = \\ &= \ln \sqrt{x-2}^2 = \ln(x-2) \end{aligned}$$

B2. Η h παραγωγίσιμη στο $(2, +\infty)$ με

$$h'(x) = \frac{1}{x-2} > 0 \text{ οπότε η } h \text{ είναι αυξανόμενη}$$

αύξουσα στο $(2, +\infty)$ οπότε και h^{-1} άρα αντιστρέφεται

$$\text{με } D_{h^{-1}} = h(D_h) \stackrel{h \uparrow}{\text{συνεχώς}} (\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)) = (-\infty, +\infty)$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) \stackrel{x-2=y}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty$$

$$\text{με } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0$$



-2-

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) \stackrel{x-2=\omega}{=} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \ln \omega = +\infty$$

$$\text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$$

$$\text{Τότε } h(x) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = y \Leftrightarrow x-2 = e^y \Leftrightarrow x = e^y + 2$$

$$\text{Αρα } h^{-1}(x) = e^x + 2, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\text{B3)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left[h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right] = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\ln(x-2) \cdot \frac{2h(x-1)}{x-2} \right] = (-\infty) \cdot 2 = -\infty$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) \stackrel{x=x-2}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2h(x-1)}{x-2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{0 < x-2 \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{x-1}}{1} = \frac{2}{2-1} = 2$$



-3-

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i) Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$
οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx^3 + \mu x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(k + \frac{\mu}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} \\ &= (+\infty) \cdot k \end{aligned}$$

Αν $k > 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ απορρίπτεται

Αν $k < 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ απορρίπτεται

$$\text{Αν } k = 0 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = 0$$

δεκτό

Αρα $k = 0$

$$\text{ii) Για } k = 0: f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο $(0, 0)$
είναι $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ με $f(0) = 0$
ή $y = f'(0)x$

Για να εφαπτεται στο $(0, 0)$ πρέπει $f'(0) = 1$

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{\mu(x^2 + 1) - \mu x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-\mu x^2 + \mu}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{οπότε } f'(0) = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$$



- 4 -

Γ2 i) Για $k=0, \mu=1$: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Η f παραχωσιζιγνη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Επειδή το $(x^2+1)^2 > 0$ η f' είναι ομόσημη του αριθμητή

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'		$-$	$+$	$-$
f		$\nearrow$	$\searrow$	
		ΤΕ	ΤΗ	

Η f είναι σνηείως
φθίνουσα στα $(-\infty, -1]$
και $[1, +\infty)$ και
σνηείως αύξουσα
στο $[-1, 1]$

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο -1

$$\text{το } f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2+1} = -\frac{1}{2}$$

και τοπικό μέγιστο στο 1 το $f(1) = \frac{1}{2}$

Για το σύνολο Τιμών

$$f((-\infty, -1]) \overset{\text{συνεχης}}{=} [f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [-\frac{1}{2}, 0)$$

$$\text{με } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$



- 5 -

$$f((-1, 1)) \stackrel{fI}{\underset{\text{συνεχης}}{=}} (\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\mu\epsilon \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x^2+1} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$f([1, +\infty)) \stackrel{fI}{\underset{\text{συνεχης}}{=}} (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1)] = (0, \frac{1}{2}]$$

$$\mu\epsilon \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Άρα το εύρος τιμών της f είναι

$$[-\frac{1}{2}, 0) \cup (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cup (0, \frac{1}{2}] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

iii) Επειδή $a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$, το $a^2 + \frac{1}{2} \in [\frac{1}{2}, +\infty)$ Αν $a^2 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ τότε η $f(x) = a^2 + \frac{1}{2}$ είναι αδύνατη.Αν $a^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 0$ τότε η $f(x) = a^2 + \frac{1}{2}$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$

$$\Gamma 3. i) I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{x^2+1} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2n+1} + x^{2n+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}(1+x^2)}{1+x^2} dx$$

$$= \int_0^1 x^{2n+1} dx = \left[\frac{x^{2n+2}}{2n+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2n+2}$$

$$= \frac{1}{2n+2}$$



-6-

$$\text{ii) Για } v=0: I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} [\ln|x^2+1|]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$$

$$\text{Για } v=0 \text{ από i) } I_0 + I_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1 - \ln 2}{2}$$

$$\text{Για } v=1: \text{ από i) } I_1 + I_2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - I_1$$

$$\Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1 - \ln 2}{2} = \frac{-1 + 2\ln 2}{4}$$



- 7 -

ΘΕΜΑ ΔΔ1. Θεωρώ $h(x) = g(x) + x$, $x \in \mathbb{R}$ Για την h ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Βολζανό στο $[-1, 0]$ αφού: $\cdot$ h συνεχής στο $[-1, 0]$ ως άθροισμα συνεχών

$$\cdot h(-1) = g(-1) + (-1) = g(-1) - 1 < 0$$

$$\text{αφού } 0 < g(x) < 1 \stackrel{x=-1}{\Rightarrow} 0 < g(-1) < 1$$

$$\cdot h(0) = g(0) + 0 = g(0) > 0 \quad \text{αφού } 0 < g(x) < 1 \stackrel{x=0}{\Rightarrow} 0 < g(0) < 1$$

Αρα από Θ. Βολζανό υπάρχει ξ το πολύχριστον $x_\xi \in (-1, 0)$ τέω $h(x_\xi) = 0$

και επειδή $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ και συνεχής
 άρα διατηρεί πρόσημο δηλ. $h'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 ή $h'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ οπότε η h είναι
 γνήσιας μονότονη. Αρα το x_ξ είναι μοναδική
 ρίζα.

Δ2. Επειδή η f είναι παραχωρίσιμη στο $(-\infty, \frac{\pi}{2})$ θα είναι και συνεχής στο $(-\infty, \frac{\pi}{2})$ οπότεθα είναι και συνεχής στο $x_0 = 0$

$$\text{Αρα } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2(g(x) + x)) = 0 \cdot g(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (2\pi x + \epsilon \phi x - kx) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ισχύει}$$

$$f(0) = 0$$



-8-

Επίσης θα είναι και παραχωρίσιμη στο 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(g(x) + x)}{x} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \epsilon\phi x - kx}{x} \quad \begin{matrix} \text{o/b} \\ \text{rule} \end{matrix} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\epsilon\upsilon\nu x + \frac{1}{\epsilon\upsilon\nu^2 x} - k}{1} \\ &= 2 + 1 - k \\ &= 3 - k \end{aligned}$$

$$\text{Αρα } 3 - k = 0 \Rightarrow \boxed{k=3}$$

$$\Delta 3. \text{ i) } f(x) = 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x \quad x \in [0, \pi/2)$$

$$f'(x) = 2\epsilon\upsilon\nu x + \frac{1}{\epsilon\upsilon\nu^2 x} - 3$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{2\epsilon\upsilon\nu^3 x - 3\epsilon\upsilon\nu^2 x + 1}{\epsilon\upsilon\nu^2 x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{(\epsilon\upsilon\nu x - 1)(2\epsilon\upsilon\nu^2 x - \epsilon\upsilon\nu x - 1)}{\epsilon\upsilon\nu^2 x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{(\epsilon\upsilon\nu x - 1)^2 (2\epsilon\upsilon\nu x + 1)}{\epsilon\upsilon\nu^2 x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{(\epsilon\upsilon\nu x - 1)^2 \cdot (2\epsilon\upsilon\nu x + 1)}{\epsilon\upsilon\nu^2 x} > 0$$

Επειδή $(\epsilon\upsilon\nu x - 1)^2 \geq 0$ και $\epsilon\upsilon\nu^2 x > 0$ και $2\epsilon\upsilon\nu x + 1 > 0$
για $x \in (0, \pi/2)$, η $f'(x) \geq 0$ με το = να ισχύει

για $x=0$
Αρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi/2)$
οπότε για $x \geq 0$ $f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$



-9-

$$ii) f([0, \pi/2]) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} [f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)] = [0, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\pi x + \epsilon \phi x) - \kappa x = 2 \cdot 1 + (+\infty) - 0 = +\infty$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \epsilon \phi x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\pi x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \pi x \cdot \frac{1}{\sin x} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$$

Άρα η $\exists f(x) = \pi$ ει $f(x) = \pi/3$

Το $\frac{\pi}{3} \in f([0, \pi/2])$ οπότε η $f(x) = \pi/3$ έχει 1

τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \pi/2)$ κ' επειδή η f γν. αύξουσα είναι μοναδική.

Δ4] i) Το $x_1 < 0$ οπότε $f(x) = x^2(g(x) + x) = x^2 \cdot h(x)$

Θδο $f(x) \geq 0$ ει $x^2 h(x) \geq 0$ ει $h(x) \geq 0$

. Αν h είναι γν. φθίνουσα τότε

$x_1 < 0 \Rightarrow h(x_1) > h(0)$ ει $0 > h(0)$ άτοπο αφού $h(0) < 0$

. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα οπότε

για $x \geq x_1 \Rightarrow h(x) \geq h(x_1) \Rightarrow h(x) \geq 0$ ισχύει



- 10 -

$$\text{ii) } E(0) = \int_{x_1}^{\pi/3} |f(x)| dx = \int_{x_1}^0 |f(x)| dx + \int_0^{\pi/3} |f(x)| dx$$

Επειδή $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, \pi/3]$

$$\begin{aligned} \text{Τότε } E_1 &= \int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_{x_1}^0 x^2 (g(x) + x) dx \\ &= \int_{x_1}^0 \left(\frac{x^3}{3}\right)' (g(x) + x) dx \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \cdot (g(x) + x) \right]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} (g'(x) + 1) dx$$

$$= -\frac{x_1^3}{3} \cdot (g(x_1) + x_1) - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} \cdot g'(x) dx - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} dx$$

$$= -\frac{x_1^3}{3} \cdot h(x_1) - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} g'(x) dx - \left[\frac{x^4}{12} \right]_{x_1}^0$$

$$= -\frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx + \frac{x_1^4}{12}$$

$$E_2 = \int_0^{\pi/3} f(x) dx = \int_0^{\pi/3} (2\ln x + \epsilon \phi x - 3x) dx$$

$$= \left[-2\ln x - \ln 6 \ln x + \frac{3x^2}{2} \right]_0^{\pi/3}$$

$$= -2\ln \frac{\pi}{3} - \ln 6 \ln \frac{\pi}{3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi^2}{9} + 2$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6} + 2$$

$$= 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$



- 11 -

Πρέπει $\epsilon_1 = \epsilon_2 =$

$$= \frac{x_1^4}{12} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

$$= \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = \frac{x_1^4}{4} - 3 - 3 \ln 2 + \frac{\pi^2}{2}$$

Επιμέλεια απαντήσεων:

Δραγώνας Μπάμπης

Γκιούλος Θεόδωρος

Λιονυσοπούλου Σοφία

Μαθηματικοί

Φροντιστήριο Μ.Ε «ΕΠΙΛΟΓΗ» - Καλαμάτα

<http://www.epil.gr>