

Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία

A2. Θεωρία

A3. Θεωρία

A4. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Επειδή η f παρουσιάζει Τ.Α στο $x_0=1$, εσωτερικό σημείο του π.ο και η f είναι παραγωγίσιμη ε' αυτό (από) θ Fermat $f'(1)=0$

Είναι $f'(x)=3x^2+2ax+9$ οπότε $f'(1)=0 \Leftrightarrow 3+2a+9=0 \Leftrightarrow a=-6$

B2. Για $a=-6$: $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=3$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
f'		+	-	+
f		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		ΤΗ	ΤΕ	

Η f είναι γν. αύξουσα στα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$ και γν. φθίνουσα στο $[1, 3]$

Παρουσιάζει ΤΗ στο 1 το $f(1)=1-6+9-3=1$
και ΤΕ στο 3 το $f(3)=27-54+27-3=-3$

$$\bullet \quad f((0, 1]) \stackrel{f \uparrow}{\underset{\text{δωκεις}}{=}} (\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1)] = (-3, 1]$$

Επειδή το $0 \in f((0, 1])$ άρα η $f(x)=0$ έχει $\geq$ τουλάχιστον
ρίζα στο $(0, 1)$ και επειδή η f είναι γν. αύξουσα
ε' αυτό θα είναι μοναδική.

Επειδή η f είναι γν. μονοτονική στο $(-\infty, 1]$ η μοναδική
θετική ρίζα είναι στο $(0, 1]$

$$\mu\epsilon \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\bullet \quad f((1, 3)) \stackrel{f \downarrow}{\underset{\text{δωκεις}}{=}} (\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)) = (-3, 1)$$

Επειδή το $0 \in f((1, 3))$ άρα η $f(x)=0$ έχει $\geq$ τουλάχιστον
ρίζα στο $(1, 3)$ και επειδή η f είναι γν. φθίνουσα
θα είναι μοναδική. Άρα έχει $\geq$ θετική ρίζα στο $(1, 3)$

$$\bullet \quad f([3, +\infty)) \stackrel{f \uparrow}{\underset{\text{δωκεις}}{=}} [f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [-3, +\infty)$$

$$\mu\epsilon \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

Επειδή το $0 \in f([3, +\infty))$ άρα η $f(x)=0$ έχει $\geq$ τουλάχιστον
ρίζα στο $[3, +\infty)$ και επειδή η f είναι γνησίως
αύξουσα είναι μοναδική. Άρα έχει $\geq$ θετική ρίζα στο $[3, +\infty)$

Άρα η $f(x)=0$ έχει τρεις θετικές πραγματικές
ρίζες στο $(0, +\infty)$

B3 $f''(x) = 6x - 12$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	-	0	+
f			

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο $[2, +\infty)$

Επειδή εκατέρωθεν του 2 αλλάζει η κυρτότητα και υπάρχει η εφαπτομένη σ' αυτό, το σημείο $(2, f(2))$ δηλ $(2, -1)$ είναι σημείο καμπής

$$\text{με } f(2) = 8 - 24 + 18 - 3 = 26 - 27 = -1$$

B4. Είναι $g(x) = x + f(x)$

Η εφαπτη της (f στο $A(\xi, f(\xi))$) είναι
 $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$

$$\Leftrightarrow y = x f'(\xi) - \xi f'(\xi) + f(\xi) \quad (1)$$

Η εφαπτη της (g στο $B(\xi, g(\xi))$) είναι

$$y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi)$$

$$\Leftrightarrow y = x g'(\xi) - \xi g'(\xi) + g(\xi) \quad (2)$$

όπου $g'(x) = 1 + f'(x)$

Αρα η (2) $\Rightarrow y = x(f'(\xi) + 1) - \xi(f'(\xi) + 1) + f(\xi) + \xi$

$\Leftrightarrow y = x(f'(\xi) + 1) - \xi f'(\xi) + f(\xi) \quad (3)$

ΟΠΟΤΕ από (1) και (3)

$$x f'(\xi) - \xi f'(\xi) + f(\xi) = x(f'(\xi) + 1) - \xi f'(\xi) + f(\xi)$$

$\Leftrightarrow x f'(\xi) = x f'(\xi) + x$

$\Leftrightarrow x = 0$

Αρα οι εφθες των f και g τέμνονται στον y/y

ΘΕΜΑ Γ

$$\left. \begin{aligned} \Gamma 1. \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2+x} = 0 \\ f(0) &= \sqrt{0^2+0} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ συνεχής στο } 0$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

$$\text{Εννοώ } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \ln x}{x} = e^0 \cdot 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \cdot (2x+1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} \\ &= \frac{1}{2} (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

αφού $\sqrt{x^2+x} > 0$ κοντά στο 0^+ ή $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} = +\infty$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

Γ2. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασυμπτωτές

$$\text{Στο } -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln x = 0 \quad \text{αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{και}$$

$$|e^x \ln x| = |e^x| \cdot |\ln x| \leq |e^x| = e^x \quad \text{οπότε}$$

$$-e^x \leq e^x \eta \mu x \leq e^x \quad (1)$$

και επειδη $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0$ από των (4)

κ' Κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \eta \mu x = 0$

Αρα η $y=0$ είναι οριζόντια ασυμπτωτη στο $-\infty$

$$\text{Στο } +\infty: \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1+1/x}}{x}$$

$$\stackrel{x>0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1+1/x}}{x} = \sqrt{1+0} = 1 \quad \text{αρα } \lambda = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}^2 - x^2}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-x^2}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$$

Αρα η $y = x + \frac{1}{2}$ είναι ασυμπτωτη της f στο $+\infty$

$$\text{Γ3 θεωρω } h(x) = f(x) - x - \frac{1}{2} \quad x \in \mathbb{R}$$

h συνεχης στο $[-\pi, 0]$ ως αθροισμα συνεχων

$$h(-\pi) = f(-\pi) - \pi - \frac{1}{2} = e^{-\pi} \eta \mu(-\pi) - \pi - \frac{1}{2} = -\pi - \frac{1}{2} < 0$$

$$h(0) = f(0) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0 \quad \text{Αρα } h(0) h(-\pi) > 0 \quad \text{οποτε απο}$$

0. Bolzano η $h(x) = 0$ έχει 1 τουλάχιστον λύση στο $(-\pi, 0)$

Γ4 Την χρονική στιγμή t έχουμε

$$y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$$

οπότε παραγωγίζουμε: $y'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}$

Την χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ είναι $y'(t_0) = x'(t_0) > 0$

οπότε $y'(t_0) = \frac{(2x(t_0) + 1)x'(t_0)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}}$

$$y'(t_0) = x'(t_0)$$

$\Leftrightarrow$

$$2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} = 2x(t_0) + 1$$

$\neq$

$$4(x^2(t_0) + x(t_0)) = (2x(t_0) + 1)^2$$

$\neq$

$$4x^2(t_0) + 4x(t_0) = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1$$

$\neq$

$$0 = 1 \quad \text{αδύνατο}$$

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_0 τ.ω
 $y'(t_0) = x'(t_0)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Η εφ'ως της f στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην $y=2x$ οπότε $f'(1)=2$

Η F είναι παράγουσα της f στο $(0, +\infty)$ οπότε $F'(x) = f(x)$

$$\text{Είναι } g'(x) = \frac{F'(x) \cdot x^{e^{ux}} - F(x) \cdot (x^{e^{ux}})'}{(x^{e^{ux}})^2} \quad (1)$$

$$\text{όπου } x^{e^{ux}} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{(\ln x)^2}$$

$$\text{αρα } (x^{\ln x})' = x^{\ln x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\text{Αρα } (1) \Rightarrow g'(x) = \frac{f(x) \cdot x^{e^{ux}} - F(x) \cdot x^{e^{ux}} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{(x^{e^{ux}})^2}$$

$$= \frac{x f(x) \cdot x^{\ln x} - 2 F(x) \cdot x^{\ln x} \cdot \ln x}{(x^{\ln x})^2}$$

$$= \frac{(2 F(x) \ln x - 2 F(x) \cdot \ln x) x^{\ln x}}{(x^{\ln x})^2} = 0$$

Αρα η g συνεχής στο $(0, +\infty)$ κ' $g'(x)=0$ οπότε

η g είναι σταθερή

$$\Delta 2 \quad \text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{f'(1)}{1} = 2$$

οπών η f' συνεχής, αφού F 2 φορές παραγωγίσιμη με $f(x) = \frac{2F(x)\ln x}{x}$
 κ' F 2 φορές παραγωγίσιμη

οπών επειδή $x f(x) = 2F(x)\ln x \xrightarrow{x=1} f(1) = 0$

ii) Επειδή η F συνεχής στο $(0, +\infty)$

$$F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x f(x)}{2 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\ln x} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$\text{και } g(x) = c \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = c \Leftrightarrow F(x) = x^{\ln x} \cdot c$$

$$\text{Για } x=1: F(1) = 1^{\ln 1} \cdot c \Leftrightarrow 1 = c$$

$$\text{Άρα } F(x) = x^{\ln x} \text{ για κάθε } x > 0$$

Δ3 Η F παρλυν στο $(0, +\infty)$ με

$$F'(x) = (x^{\ln x})' = x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x} = F(x) \cdot \frac{2 \ln x}{x}$$

$$F'(x) = 0 \stackrel{F(x) > 0}{\Leftrightarrow} \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$F'(x) > 0 \stackrel{F(x) > 0}{\Leftrightarrow} \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

x	0	1	$+\infty$
F'	/	- 0 +	
F	/	$\searrow$	$\nearrow$

OE

Η $F \downarrow$ στο $(0, 1]$ και $\uparrow$
στο $[1, +\infty)$

Παρουσιάζει OE στο 1

$$\text{Το } F(1) = 1$$

Είvale $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2 \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2 \quad (2)$

Για $0 < x < 1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 0 < x^2 < x < 1 \stackrel{F \downarrow}{\Leftrightarrow} F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0$
Ομως $-(x-1)^2 < 0$ οπότε η (2) είναι αδύνατη

Για $x > 1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x^2 > x > 1 \stackrel{F \uparrow}{\Leftrightarrow} F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0$

Ομως $-(x-1)^2 < 0$ οπότε η (2) είναι αδύνατη.

Για $x = 1$: η (2) ισχύει αφού $F(1) - F(1) = 0$

Αρα η μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$
είναι η $x = 1$

$$\textcircled{\Delta 4} \quad E = \int_1^e |f(x)| dx = \int_1^e f(x) dx \quad f(x) > 0$$

$$\text{ΕΙΝΑΙ} \quad f(x) = x^{\ln x} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}$$

$$\text{ΕΙΝΑΙ} \quad e^x \geq x+1 \quad \text{για καθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$$

$$\Rightarrow \int_1^e e^{\ln^2 x} dx > \int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx$$

$$\Rightarrow E > \int_1^e x' \ln^2 x dx + e - 1$$

$$\Rightarrow E > [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx + e - 1$$

$$\Rightarrow E > e - \int_1^e (2x)' \ln x dx + e - 1$$

$$\Rightarrow E > e - [2x \ln x]_1^e + \int_1^e 2x \cdot \frac{1}{x} dx + e - 1$$

$$\Rightarrow E > e - 2e + 2(e-1) + e - 1$$

$$\Rightarrow E > 2e - 3$$