

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2025
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 99

Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο x_0 , αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$.

Για $x \neq x_0$ έχουμε :

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0), \text{ οπότε}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Επομένως $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 .

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 143

Κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f στο διάστημα Δ , είναι τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με μηδέν.

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδες 128 - 129

Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

Αν μια συνάρτηση f είναι:

➤ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και

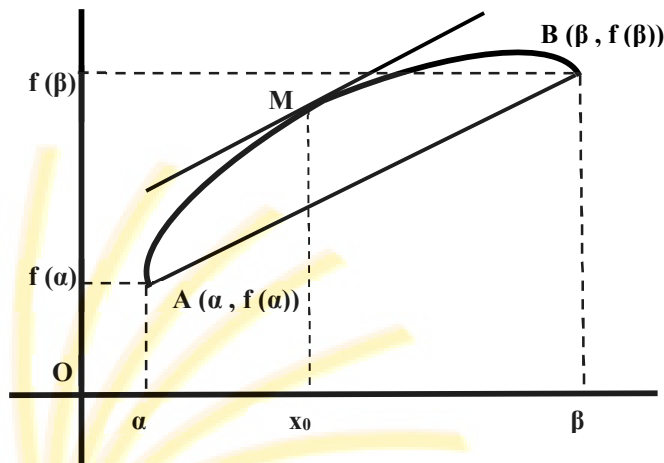
➤ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Γεωμετρική Ερμηνεία Θ.Μ.Τ.

Αν η C_f είναι μια συνεχής γραμμή από το $A(\alpha, f(\alpha))$ στο $B(\beta, f(\beta))$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , τότε υπάρχει μια τουλάχιστον εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ που είναι παράλληλη στην ευθεία AB , με $x_0 \in (\alpha, \beta)$.



A4. α. Σωστό, β. Σωστό, γ. Λάθος, δ. Σωστό, ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

B1. $D_f = (0, +\infty)$, $D_g = \mathbb{R}$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } \underbrace{e^x + 1}_{\text{ΙΣΧΥΕΙ}} > 0\} = \mathbb{R}$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(e^x + 1) = \ln(e^x + 1)$$

Επομένως $\boxed{(fog)(x) = \ln(e^x + 1), x \in \mathbb{R}}$.

B2. 1^{ος} τρόπος

$$(fog)'(x) = [\ln(e^x + 1)]' = \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1} > 0$$

άρα η fog είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η fog είναι 1-1,

άρα $\boxed{\text{η fog είναι αντιστρέψιμη}}$.

2^{ος} τρόπος

$$(fog)(x_1) = (fog)(x_2) \Leftrightarrow \ln(e^{x_1} + 1) = \ln(e^{x_2} + 1) \Leftrightarrow$$

$$e^{x_1} + 1 = e^{x_2} + 1 \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2, \text{ άρα η fog είναι 1-1,}$$

άρα $\boxed{\text{η fog είναι αντιστρέψιμη}}$.

3^{ος} τρόπος

$x_1 > x_2 \xLeftrightarrow{e^x \uparrow} e^{x_1} > e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} + 1 > e^{x_2} + 1 \xLeftrightarrow{\ln x \uparrow}$
 $\ln(e^{x_1} + 1) > \ln(e^{x_2} + 1) \Leftrightarrow (\text{fog})(x_1) > (\text{fog})(x_2),$
 άρα η fog είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η fog είναι 1-1,
 άρα **η fog είναι αντιστρέψιμη**.

4^{ος} τρόπος

Για $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$x_1 \neq x_2 \xRightarrow{e^x \text{ 1-1}} e^{x_1} \neq e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} + 1 \neq e^{x_2} + 1 \xRightarrow{\ln x \text{ 1-1}}$
 $\ln(e^{x_1} + 1) \neq \ln(e^{x_2} + 1) \Leftrightarrow (\text{fog})(x_1) \neq (\text{fog})(x_2),$
 άρα η fog είναι 1-1, άρα **η fog είναι αντιστρέψιμη**.

Εύρεση της αντίστροφης της fog

1^{ος} τρόπος (γνωρίζοντας ότι η fog είναι $\uparrow$)

$$\left. \begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (\text{fog})(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) \xrightarrow{e^x + 1 = u} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0 \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{fog})(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1) \xrightarrow{e^x + 1 = u} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$D_h = (\text{gof})(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$$

$$\text{Για } x \in \mathbb{R} \text{ και } y > 0 \text{ έχουμε : } y = (\text{fog})(x) \Leftrightarrow y = \ln(e^x + 1) \Leftrightarrow e^y = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = e^y - 1 \Leftrightarrow x = \ln(e^y - 1), y > 0$$

$$\text{Επομένως } h(x) = \ln(e^x - 1), x > 0.$$

2^{ος} τρόπος (χωρίς να γνωρίζουμε τη μονοτονία της fog)

$$y = (\text{fog})(x) \Leftrightarrow y = \ln(e^x + 1) \Leftrightarrow e^y = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = e^y - 1$$

$$\boxed{\text{Πρέπει } e^y - 1 > 0 \Leftrightarrow e^y > 1 \Leftrightarrow e^y > e^0 \Leftrightarrow y > 0}$$

$$\text{άρα } \ln e^x = \ln(e^y - 1) \Leftrightarrow x = \ln(e^y - 1)$$

$$\boxed{\text{Πρέπει } x \in D_{\text{fog}} \Leftrightarrow \ln(e^y - 1) \in \mathbb{R} \text{ που ισχύει}}$$

$$\text{Επομένως } h(x) = \ln(e^x - 1), x > 0.$$

B3.i) $h'(x) = [\ln(e^x - 1)]' = \frac{(e^x - 1)'}{e^x - 1} = \frac{e^x}{e^x - 1} > 0$, για $x > 0$

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και δεν έχει ακρότατα.

ii) $h''(x) = \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right)' = \frac{(e^x)' \cdot (e^x - 1) - e^x \cdot (e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x \cdot (e^x - 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2}$
 $= \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x}}{(e^x - 1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} < 0$, για $x > 0$

άρα η h είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$ και η C_h δεν έχει σημεία καμπής.

B4. $D_h = (0, +\infty)$

- κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(e^x - 1) \stackrel{e^x - 1 = u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ (e^x - 1) = 0}} \ln u = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$$

άρα η C_h έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$ ($y'y$).

- πλάγιες / οριζόντιες ασύμπτωτες

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x - 1)}{x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(e^x - 1)]'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x - 1}}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(e^x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1 = \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - \lambda x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x - 1) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x - 1) - \ln e^x] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x - 1}{e^x} \stackrel{\frac{e^x - 1}{e^x} = u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \frac{e^x - 1}{e^x} = 1}} \ln u = \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0 = \beta \end{aligned}$$

άρα η C_h έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = x$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = \left(\alpha \frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} + x \right)' = \alpha x^3 + 3x^2 + x + 1, x \in \mathbb{R}.$

Είναι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$, άρα

η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ είναι

$(\varepsilon) : y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow \boxed{(\varepsilon) : y = x}$

Γ2. $f''(x) = (\alpha x^3 + 3x^2 + x + 1)' = 3\alpha x^2 + 6x + 1, x \in \mathbb{R}.$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 36 - 12\alpha$, άρα

f κυρτή στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0$ και $3\alpha > 0 \Leftrightarrow 6 - 12\alpha \leq 0$ και $\alpha > 0 \Leftrightarrow$

$3 - 12\alpha \leq -36$ και $\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 3$ και $\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 3$

άρα η ελάχιστη τιμή του α ώστε η f να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ είναι $\alpha = 3$.

Για $\alpha = 3$ είναι : $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x, x \in \mathbb{R}$ και

$f'(x) = 3x^3 + 3x^2 + x + 1, x \in \mathbb{R}.$

Γ3. $\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \eta \mu f(x) \stackrel{f(x)=u}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \eta \mu f(x) = 0 \quad \lim_{u \rightarrow 0} \eta \mu u = 0$

$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \ln[f(x) - x] \stackrel{f(x)-x=u}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \ln u = -\infty$ άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln[f(x) - x]} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu f(x)}{\ln[f(x) - x]} = \lim_{x \rightarrow 0} \eta \mu f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln[f(x) - x]} = 0 \cdot 0 = 0$

Γ4. 1^{ος} τρόπος

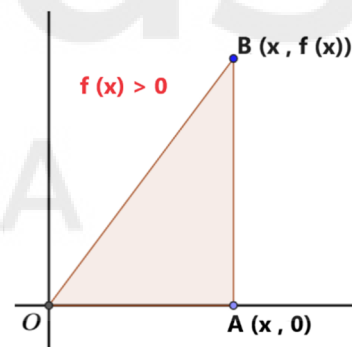
$E = \frac{1}{2} \cdot (OA) \cdot (OB) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot f(x),$ άρα $E(t) = \frac{1}{2} \cdot x(t) \cdot f(x(t))$

$E'(t) = \frac{1}{2} \cdot x'(t) \cdot f(x(t)) + \frac{1}{2} \cdot x(t) \cdot f'(x(t)) \cdot x'(t) \stackrel{x'(t)=2}{\Rightarrow}$

$E'(t) = f(x(t)) + x(t) \cdot f'(x(t))$

και τη χρονική στιγμή t_0 που $x(t_0) = 2$

$E'(t_0) = f(x(t_0)) + x(t_0) \cdot f'(x(t_0)) = f(2) + 2 \cdot f'(2) = 24 + 2 \cdot 39 = 102 \text{ cm}^2/\text{sec}$



2^{ος} τρόπος

$$E = \frac{1}{2} \cdot (OA) \cdot (OB) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot f(x) = \frac{3}{8}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2,$$

$$\text{άρα } E(t) = \frac{3}{8}x^5(t) + \frac{1}{2}x^4(t) + \frac{1}{4}x^3(t) + \frac{1}{2}x^2(t)$$

$$E'(t) = \frac{15}{8}x^4(t) \cdot x'(t) + 2x^3(t) \cdot x'(t) + \frac{3}{4} \cdot x^2(t) \cdot x'(t) + x(t) \cdot x'(t) \quad x'(t)=2 \Rightarrow$$

$$E'(t) = \frac{15}{4}x^4(t) + 4x^3(t) + \frac{3}{2} \cdot x^2(t) + 2x(t)$$

και τη χρονική στιγμή t_0 που $x(t_0) = 2$

$$E'(t_0) = 60 + 32 + 6 + 4 = \mathbf{102 \text{ cm}^2/\text{sec}}$$

3^{ος} τρόπος

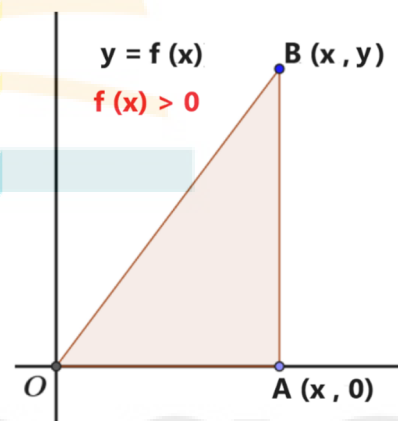
$$E = \frac{1}{2} \cdot (OA) \cdot (OB) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y, \text{ άρα } E(t) = \frac{1}{2} \cdot x(t) \cdot y(t)$$

$$E'(t) = \frac{1}{2} \cdot x'(t) \cdot y(t) + \frac{1}{2} \cdot x(t) \cdot y'(t) \quad x'(t)=2 \Rightarrow$$

$$E'(t) = y(t) + \frac{1}{2} \cdot x(t) \cdot y'(t)$$

και τη χρονική στιγμή t_0 που $x(t_0) = 2$ είναι $y(t_0) = 24$

$$E'(t_0) = y(t_0) + \frac{1}{2} \cdot x(t_0) \cdot y'(t_0) \quad x(t_0)=2 = 24 + y'(t_0)$$



Βρίσκουμε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης

$$y(t) = \frac{3}{4}x^4(t) + x^3(t) + \frac{1}{2}x^2(t) + x(t), \text{ άρα}$$

$$y'(t) = \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot x^3(t) \cdot x'(t) + 3x^2(t) \cdot x'(t) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x(t) \cdot x'(t) + x'(t) \quad x'(t)=2 \Rightarrow$$

$$y'(t) = 6x^3(t) + 6x^2(t) + 2x(t) + 2 \text{ και τη χρονική στιγμή } t_0 \text{ που } x(t_0) = 2$$

$$y'(t_0) = 6x^3(t_0) + 6x^2(t_0) + 2x(t_0) + 2 = 6 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 2 = 78 \text{ cm/sec}$$

$$\text{Επομένως } E'(t_0) = 24 + 78 = \mathbf{102 \text{ cm}^2/\text{sec}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) Είναι $e^{f(x)-1} + x - \sqrt{x^2 + 1} \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Θεωρούμε $g(x) = e^{f(x)-1} + x - \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

Είναι $g(x) \geq g(0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο 0.

$$g'(x) = (e^{f(x)-1} + x - \sqrt{x^2 + 1})' = e^{f(x)-1} \cdot f'(x) + 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$
- το $x_0 = 0$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$

από Θ. Fermat

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow e^{f(0)-1} \cdot f'(0) + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(0) = -1}$$

ii) $f'(x) = (\sqrt{x^2 + 1} + \alpha x)' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \alpha, \quad x \in \mathbb{R}$

$$f'(0) = -1 \Leftrightarrow \frac{0}{\sqrt{0^2 + 1}} + \alpha = -1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -1}$$

Δ2. 1^{ος} τρόπος

Είναι $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$, άρα $\sqrt{x^2 + 1} > x$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

επομένως η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

2^{ος} τρόπος

Έστω ρ ρίζα της f , άρα $f(\rho) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\rho^2 + 1} - \rho = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\rho^2 + 1} = \rho$

- Αν $\rho < 0$ είναι $\sqrt{\rho^2 + 1} \geq 0 > \rho$ (άτοπο)
- Αν $\rho \geq 0$ είναι $(\sqrt{\rho^2 + 1})^2 = \rho^2 \Leftrightarrow \rho^2 + 1 = \rho^2 \Leftrightarrow 0 = 1$ (άτοπο)

Η συνεχής f δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, άρα από συνέπειες Θ. Bolzano

η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f(0) = 1 > 0$

θα είναι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

άρα η **f** είναι γνησίως φθίνουσα στο **$\mathbb{R}$** .

Δ3. 1^{ος} τρόπος

Η εξίσωση γράφεται :

$$F(3\eta\mu^2x) - F(2\eta\mu^2x) = F(2\eta\mu^2x) - F(\eta\mu^2x) \quad (1)$$

• αν $x = 0$ ή $x = \pi$, τότε $\eta\mu x = 0$ και η (1) επαληθεύεται

• αν $x \in (0, \pi)$, τότε $\eta\mu x \neq 0$ και $\eta\mu^2x < 2\eta\mu^2x < 3\eta\mu^2x$

□ η συνάρτηση **F** είναι συνεχής στο διάστημα $[\eta\mu^2x, 2\eta\mu^2x]$

□ η συνάρτηση **F** είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(\eta\mu^2x, 2\eta\mu^2x)$
οπότε εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι :

υπάρχει $x_1 \in (\eta\mu^2x, 2\eta\mu^2x)$, τέτοιο ώστε :

$$F'(x_1) = \frac{F(2\eta\mu^2x) - F(\eta\mu^2x)}{2\eta\mu^2x - \eta\mu^2x} \Leftrightarrow f(x_1) = \frac{F(2\eta\mu^2x) - F(\eta\mu^2x)}{\eta\mu^2x} \quad (2)$$

□ η συνάρτηση **F** είναι συνεχής στο διάστημα $[2\eta\mu^2x, 3\eta\mu^2x]$

□ η συνάρτηση **F** είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(2\eta\mu^2x, 3\eta\mu^2x)$
οπότε εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι :

υπάρχει $x_2 \in (2\eta\mu^2x, 3\eta\mu^2x)$, τέτοιο ώστε :

$$F'(x_2) = \frac{F(3\eta\mu^2x) - F(2\eta\mu^2x)}{3\eta\mu^2x - 2\eta\mu^2x} \Leftrightarrow f(x_2) = \frac{F(3\eta\mu^2x) - F(2\eta\mu^2x)}{\eta\mu^2x} \quad (3)$$

$$\text{Είναι } x_1 < x_2 \xrightarrow{f \downarrow} f(x_1) > f(x_2) \xLeftrightarrow{(2)} \xLeftrightarrow{(3)}$$

$$\frac{F(2\eta\mu^2x) - F(\eta\mu^2x)}{\eta\mu^2x} > \frac{F(3\eta\mu^2x) - F(2\eta\mu^2x)}{\eta\mu^2x} \xLeftrightarrow{\eta\mu^2x > 0}$$

$$F(2\eta\mu^2x) - F(\eta\mu^2x) > F(3\eta\mu^2x) - F(2\eta\mu^2x)$$

άρα η εξίσωση (1) είναι αδύνατη στο $(0, \pi)$.

Επομένως μοναδικές ρίζες **$x = 0$** και **$x = \pi$** .

2^{ος} τρόπος

Στην εξίσωση αν θέσουμε $\eta\mu^2 x = u$, έχουμε :

$$F(3u) - F(2u) = F(2u) - F(u), \text{ με } u \in [0, 1] \quad (4)$$

- αν $u = 0$ η (4) επαληθεύεται

- αν $u \in (0, 1]$, τότε $u < 2u < 3u$

- η συνάρτηση F είναι συνεχής στο διάστημα $[u, 2u]$

- η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(u, 2u)$

οπότε εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι :

$$\text{υπάρχει } \xi_1 \in (u, 2u), \text{ τέτοιο ώστε : } F'(\xi_1) = \frac{F(2u) - F(u)}{2u - u} \Leftrightarrow$$

$$f(\xi_1) = \frac{F(2u) - F(u)}{u} \Leftrightarrow F(2u) - F(u) = u \cdot f(\xi_1) \quad (5)$$

- η συνάρτηση F είναι συνεχής στο διάστημα $[2u, 3u]$

- η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(2u, 3u)$

οπότε εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι :

$$\text{υπάρχει } x_2 \in (2u, 3u), \text{ τέτοιο ώστε : } F'(\xi_2) = \frac{F(3u) - F(2u)}{3u - 2u} \Leftrightarrow$$

$$f(\xi_2) = \frac{F(3u) - F(2u)}{u} \Leftrightarrow F(3u) - F(2u) = u \cdot f(\xi_2) \quad (6)$$

$$(4) \stackrel{(5)}{\Leftrightarrow} u \cdot f(\xi_2) = u \cdot f(\xi_1) \stackrel{0 < u \leq 1}{\Leftrightarrow} f(\xi_2) = f(\xi_1) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} \xi_2 = \xi_1$$

που είναι άτοπο, διότι $u < \xi_1 < 2u < \xi_2 < 3u$.

Άρα η εξίσωση (4) είναι αδύνατη στο $(0, 1]$.

$$\text{Επομένως } u = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \stackrel{x \in [0, \pi]}{\Leftrightarrow} x = 0 \text{ ή } x = \pi.$$

Δ4. $0 \leq x \leq 1 \xRightarrow{f \downarrow} f(0) \geq f(x) \Leftrightarrow 1 \geq f(x) \Leftrightarrow 1 - f(x) \geq 0$
(στην τελευταία σχέση το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$)

Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu u \leq u$, για κάθε $u \geq 0$ και το "=" ισχύει μόνο για $u = 0$

άρα $\eta\mu(1 - f(x)) \leq 1 - f(x)$, για κάθε $x \in [0, 1]$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$

άρα $x \cdot \eta\mu(1 - f(x)) \leq x - x \cdot f(x)$, για κάθε $x \in [0, 1]$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$

Επομένως $\int_0^1 x \cdot \eta\mu(1 - f(x)) dx < \int_0^1 [x - x \cdot f(x)] dx \Leftrightarrow$

$\int_0^1 x \cdot \eta\mu(1 - f(x)) dx < \int_0^1 (x + x^2 - x \cdot \sqrt{x^2 + 1}) dx \Leftrightarrow$

$\int_0^1 x \cdot \eta\mu(1 - f(x)) dx < \int_0^1 x dx + \int_0^1 x^2 dx - \underbrace{\int_0^1 x \cdot \sqrt{x^2 + 1} dx}_{(7)} \quad (7)$

$I = \int_0^1 x \cdot \sqrt{x^2 + 1} dx \rightarrow$ Θέτω $x^2 + 1 = u$ Είναι $2x dx = du \Leftrightarrow$ $dx = \frac{du}{2}$ • $x = 0 \Rightarrow u = 1$ • $x = 1 \Rightarrow u = 2$ $= \int_1^2 \sqrt{u} \frac{du}{2}$ $= \frac{1}{2} \int_1^2 u^{\frac{1}{2}} du$ $= \frac{1}{2} \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} [u\sqrt{u}]_1^2 = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3} \quad (8)$	$I = \int_0^1 x \cdot \sqrt{x^2 + 1} dx \rightarrow$ Θέτω $\sqrt{x^2 + 1} = t \Leftrightarrow$ $x^2 + 1 = t^2$ Είναι $2xdx = 2tdt \Leftrightarrow$ $xdx = tdt$ • $x = 0 \Rightarrow t = 1$ • $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$ $= \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt$ $= \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^{\sqrt{2}}$ $= \frac{\sqrt{2}^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3} \quad (8)$
---	---

Από (7) και (8) προκύπτει ότι

$\int_0^1 x \cdot \eta\mu(1 - f(x)) dx < \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \frac{2\sqrt{2} - 1}{3} \Leftrightarrow$

$\int_0^1 x \cdot \eta\mu(1 - f(x)) dx < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2} - 1}{3} \Leftrightarrow$

$\int_0^1 x \cdot \eta\mu(1 - f(x)) dx < \frac{7 - 4\sqrt{2}}{6}.$

Επιμέλεια : Μάνος Κοθρής