

Αναρτήσεις

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία 6ελ. 76

A2. Θεωρία 6ελ. 155

A3. Θεωρία 6ελ. 216

A4. α) Σ β) Σ γ) $\wedge$ δ) $\wedge$ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

$$\begin{aligned} B1. D_g &= [1, +\infty) & D_f &= \{x \in D_g \text{ και } x \in D_h \text{ και } h(x) \neq 0\} \\ D_h &= [1, +\infty) & &= \{x \geq 1 \text{ και } x \geq 1 \text{ και } \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0\} \\ & & &= \{x \geq 1 \text{ και } x \geq 1 \text{ και } x - 1 \neq 0\} \\ & & &= \{x \geq 1 \text{ και } x \geq 1 \text{ και } x \neq 1\} \\ & & &= x \in (1, +\infty) \end{aligned}$$

$$\text{και } f(x) = \left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$D_r = \{x \in D_g \text{ και } x \in D_h\} = \{x \geq 1 \text{ και } x \geq 1\} = [1, +\infty)$$

$$\text{και } r(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = x - \frac{1}{x}$$

B2 Η f είναι παραχωρίσιμη στο $(1, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{1(x-1) - (x+1) \cdot 1}{x^2} = -\frac{2}{x^2} < 0 \text{ και επειδή η } f \text{ είναι}$$

συνεχής στο $(1, +\infty)$, η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα 1-1

οπότε η f αντιστρέφεται με πεδίο ορισμού

$$Df^{-1} = f((1, +\infty)) \stackrel{f \downarrow}{\underset{\text{συνεχης}}{=}} (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)) = (1, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) \frac{1}{x-1} = 2 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\text{Επίσης } f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = y \quad \mu \epsilon \quad y > 1$$

$$\Leftrightarrow x+1 = xy - y \quad \mu \epsilon \quad y > 1$$

$$\Leftrightarrow x(y-1) = y+1, \quad y > 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1}, \quad y > 1$$

$$\text{'Αρα η } f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1} \quad \mu \epsilon \quad y > 1 \quad \text{οπότε } f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad x > 1$$

Αρα οι f και οι f^{-1} έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού $A = (1, +\infty)$
και ισχύει $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) \quad \forall x \in A$

$$\text{Αρα } f = f^{-1}$$

B3 Η γ είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ άρα δεν έχει
κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1 - 0 = 1$$

$$\text{Αρα } \lambda = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\Gamma(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{x} - x\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

οπότε $\beta = 0$

Αρα η $y = x$ είναι ηλάσια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

B4.

όπου $f^{-1} \circ f = f \circ f$ οπότε $Df \circ f = \begin{cases} x \in Df \\ \text{και} \\ f(x) \in Df \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \text{και} \\ \frac{x+1}{x-1} > 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} x > 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \text{και} \\ x+1 > x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \text{και} \\ 1 > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1, +\infty) \end{aligned}$$

Αρα η εξίσωση

$$(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4\Gamma(x) \quad \text{ορίζεται στο } (1, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x}$$

$$\Leftrightarrow x^3 = x + 4x^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x - 4x^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \quad \text{ή} \quad x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 1 \quad \text{ή} \quad x = 4 \quad \text{δεύτερη} \quad \text{Αρα } x = 4$$

απορρίπτονται

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $Df = [0, +\infty)$

Η f είναι συνεχής στο $[0, 2)$ και $(2, +\infty)$ ως άθροισμα συνεχών.

Για να είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ πρέπει να είναι συνεχής και στο 2, δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x + 4 + e^x) = -4 + 4 + e^2 = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + 4x - 3 + \lambda) = -4 + 8 - 3 + \lambda = 1 + \lambda$$

$$f(2) = 1 + \lambda$$

Αρα $e^2 = 1 + \lambda$ (1) Όμως ισχύει $e^x \geq x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ με το = για $x = 0$

Αρα η (1) ισχύει για $\lambda = 0$

η θεωρώ $K(\lambda) = e^\lambda - 1 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$

$$K(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$$

$$K'(\lambda) = e^\lambda - 1$$

$$K'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow e^\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow e^\lambda = e^0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

$$K'(\lambda) > 0 \Leftrightarrow e^\lambda - 1 > 0 \Leftrightarrow e^\lambda > 1 \Leftrightarrow \lambda > 0$$

$$K'(\lambda) < 0 \Leftrightarrow e^\lambda - 1 < 0 \Leftrightarrow \lambda < 0$$

λ	$-\infty$	0	$+\infty$
K'	-	0	+
K	$\searrow$		$\nearrow$

Η K παρουσιάζει ΟΕ στο 0 το $K(0) = 0$

οπότε $K(\lambda) \geq 0$ με το = για

$\lambda = 0$, οπότε η (1) έχει

λύση για $\lambda = 0$

Γ2. $f(x) = \begin{cases} -2x + 5, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3, & x \geq 2 \end{cases}$

Για $x \in [0, 2)$ η f παραγωγίσιμη με $f'(x) = -2 < 0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2)$

Για $x \in (2, +\infty)$ η f παρ/μη με $f'(x) = -2x + 4 < 0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$

Κ' επειδή η f είναι συνεχής στο 2, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

x	0	$+\infty$
f'	$\diagup$	$-$
f	$\diagup$	$\searrow$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 0 το $f(0) = 5$

Γ3. i) Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ οπότε και στο $[0, 3]$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2)$ και $(2, 3]$ ως άθροισμα παρ/μων

$$\begin{aligned} \text{Στο } x_0 = 2: \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 3 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)^2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)}{1} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 5 - 1}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(x-2)}{x - 2} = -2 \end{aligned}$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2

οπότε για την f δεν ισχύουν οι υποθέσεις του

ΘΜΤ στο $[0,3]$

ii) Για να υπάρχει η εφαπτομένη της f στο $(\xi, f(\xi))$
και να είναι παράλληλη στην ΔΕ

$$\text{Τότε } f'(\xi) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{0 - 5}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = \begin{cases} -2 & , 0 < x < 2 \\ -2x + 4 & , x > 2 \end{cases}$$

Αν $0 < \xi < 2$ τότε $f'(\xi) = -2$ αδύνατο

Αν $2 < \xi < 3$ τότε $f'(\xi) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2\xi + 4 = -\frac{5}{3}$

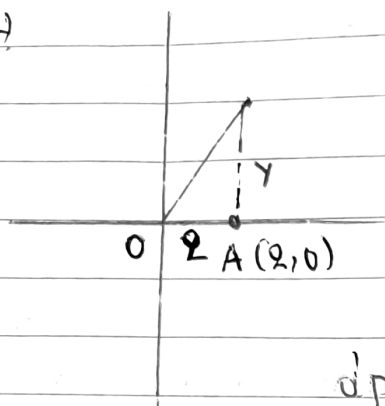
$$\Leftrightarrow -6\xi + 12 = -5$$

$$\Leftrightarrow -6\xi = -17$$

$$\Leftrightarrow \xi = 17/6 \text{ δευτή}$$

Άρα υπάρχει $\xi \in (0,3)$ τω $f'(\xi) = -5/3$

Γ4



$$\epsilon\phi\omega = \frac{y}{2}$$

οπότε την χρονική στιγμή t

$$\epsilon\phi\omega(t) = \frac{y(t)}{2}$$

άρα $\frac{1}{\sin^2\omega(t)} \omega'(t) = \frac{y'(t)}{2}$

$$(1 + \epsilon\phi^2\omega(t)) \omega'(t) = \frac{y'(t)}{2}$$

Την χρονική στιγμή t_0

$$(1 + \epsilon\phi^2\omega(t_0)) \cdot \omega'(t_0) = \frac{y'(t_0)}{2} \quad (1)$$

οπότε $\epsilon\phi\omega(t_0) = \frac{y(t_0)}{2} = \frac{1}{2}$

όπου $y(t_0) = f(2) = 1$

οπότε η (1) $\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{4}\right) \omega'(t) = \frac{0,5}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4} \omega'(t) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \omega'(t) = \frac{1}{5} \text{ rad/sec}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + a$$

Η f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$$

x	0	e	$+\infty$
f'	$\parallel$	$+$	$-$
f	$\parallel$	$\nearrow$	$\searrow$

$f((0, e]) \stackrel{f \downarrow}{\text{overns}} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(e) \right] = (-\infty, \frac{1}{e} + a]$

$$\text{οπou } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{x} + a \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x \cdot \frac{1}{x} + a \right) =$$

$$= (-\infty)(+\infty) + a = -\infty$$

$$f(e) = \frac{\ln e + ae}{e} = \frac{1 + a}{e}$$

$$f((e, +\infty)) \stackrel{f \downarrow}{\text{overns}} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} f(x) \right) = (a, \frac{1}{e} + a)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + ax}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + a \right) = 0 + a = a$$

$$\text{πε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{\text{DlH}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{Αρα } f((0, +\infty)) = (-\infty, \frac{1}{e} + a] \text{ αρα } \frac{1}{e} + a = \frac{1}{e} + 1 \Leftrightarrow a = 1$$

$$\Delta 2 \quad f((0, e]) = (-\infty, \frac{1}{e} + 1] \quad \text{και} \quad f((e, +\infty)) = (1, -\frac{1}{e} + 1)$$

Το 0 ανήκει μόνο στο $f((0, e])$ οπότε η $f(x) = 0$ έχει $\exists$ τουλάχιστον λύση στο $(0, e)$ κ' επειδή η f είναι γνησίως αυξουσα είναι μοναδική

$$\kappa' \text{ επειδή } f(1) = 1 > 0 \quad \text{και} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = -2\ln 2 + 1 < 0 \quad \kappa' \text{ η } f$$

δυναμής στο $[\frac{1}{2}, 1]$, από το Θ. Bolzano η μοναδική

$$\rhoίζα \text{ } \chi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\Delta 3 \quad \text{i)} \quad f(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{2 \ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2} = f(2)$$

Αρα η εξίσωση $f(x) = f(4)$ έχει προφανείς λύσεις τις $x=2$ και $x=4$ κ' επειδή η f γνησίως μονοτονή σε κάθε ένα από τα $(0, e]$ κ' $(e, +\infty)$, αυτές θα είναι μοναδικές

$$\text{ii)} \quad 2^x \leq x^2 \stackrel{x \geq 1}{\Leftrightarrow} \ln 2^x \leq \ln x^2 \Leftrightarrow x \ln 2 \leq 2 \ln x \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} \frac{\ln 2}{2} \leq \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow f(x) \geq f(2)$$

Για $x \in (0, e]$ η $f \uparrow$ οπότε $f(x) \geq f(2) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} 2 \leq x \leq e$
 Για $x \in (e, +\infty)$ η $f \downarrow$ οπότε $f(x) \geq f(4) \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} e < x \leq 4$

$$\text{Αρα} \quad 2 \leq x \leq 4$$

$$\Delta 4. \quad E(0) = \int_{-\ln 2}^0 |g(x)| dx = \int_{-\ln 2}^0 \left| f(e^x) \frac{1-x}{e^x} \right| dx =$$

Θέτω $e^x = u$

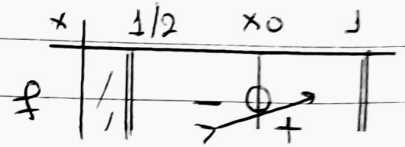
$$e^x dx = du$$

$$dx = \frac{1}{u} du$$

για $x=0: u=e^0=1$

$x=-\ln 2: u=e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$

Απο $E(0) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left| \frac{f(u)}{u} (1-\ln u) \right| \frac{1}{u} du$



$$1 - \ln u \geq 0$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(u)}{u} \frac{1-\ln u}{u} du$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} (-f(u)) \cdot \frac{1-\ln u}{u^2} du + \int_{x_0}^1 f(u) \frac{1-\ln u}{u^2} du$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} (-f(u) f'(u)) du + \int_{x_0}^1 f(u) f'(u) du$$

$$= \left[-\frac{f^2(u)}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^{x_0} + \left[\frac{f^2(u)}{2} \right]_{x_0}^1$$

$$= -\cancel{\frac{f^2(x_0)}{2}} + \frac{f^2(\frac{1}{2})}{2} + \frac{f^2(1)}{2} - \cancel{\frac{f^2(x_0)}{2}}$$

$$= \frac{f^2(\frac{1}{2}) + f^2(1)}{2} = \frac{(1-2\ln 2)^2 + 1}{2} \text{ τελευτα}$$

οπου $f(\frac{1}{2}) = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + 1 = 2(-\ln 2) + 1 = (1-2\ln 2)$