

Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σελ. 111

A2. Θεωρία σελ. 104

A3. Θεωρία σελ. 128

A4. α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Για να ορίζεται η $g \circ h$ πρέπει

$$\begin{cases} x \in D_h \\ \text{και} \\ h(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \text{και} \\ \ln x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

Αρα η $g \circ h$ ορίζεται με π.ο. το $D_{g \circ h} = (0, +\infty)$
και τύπο

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = \frac{4 - e^{2 \ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - e^{\ln x^2}}{x} = \frac{4 - x^2}{x}$$

B2. i) Η f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{-2x \cdot x - (4 - x^2) \cdot 1}{x^2} = \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} = \frac{-x^2 - 4}{x^2} < 0$$

Αρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

ii) Επειδή $\pi > e \xrightarrow{f \downarrow} f(\pi) < f(e) \Leftrightarrow \frac{4 - \pi^2}{\pi} < \frac{4 - e^2}{e} \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} 4 - e^2 < 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4 - \pi^2}{\pi > 0} &> \frac{\pi}{e} \end{aligned}$$



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Μ.Ε.

ΕΠΙΛΟΓΗ

Ιατροπούλου 3 & Χρ. Παγώνη 12 - Καλαμάτα

Τηλ.: 27210 95352 & 27210 96390, e-mail: info@epil.gr

Διευθ. Ιστοσελίδας: www.epil.gr

$$B3. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (4-x^2) \frac{1}{x} = 4 \cdot (+\infty) = +\infty$$

Αρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

$$\text{Στο } +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 \text{ Αρα } \lambda = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4-x^2}{x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2+x^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 \end{aligned}$$

Αρα η $y = -x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$B4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6W(1+x^2)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} 6W(1+x^2)$$

$$\text{οπου } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

$$\text{αρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$\text{ΟΠΟΤΕ } \left| \frac{6W(1+x^2)}{f(x)} \right| = \left| \frac{1}{f(x)} \cdot 6W(1+x^2) \right| = \left| \frac{1}{f(x)} \right| \cdot |6W(1+x^2)| \leq \left| \frac{1}{f(x)} \right|$$

$$\Leftrightarrow -\left| \frac{1}{f(x)} \right| \leq \frac{6W(1+x^2)}{f(x)} \leq \left| \frac{1}{f(x)} \right| \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\left| \frac{1}{f(x)} \right| \right) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{f(x)} \right| &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Απο Κριτήριο παρεμβολής} \\ &\text{ή την (1)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6W(1+x^2)}{f(x)} = 0 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma 1. \int_2^3 x f(x) dx = 1 \quad \Leftrightarrow \int_2^3 x \cdot \left(\frac{1}{x} + a \right) dx = 1 \quad \Leftrightarrow \int_2^3 (1 + ax) dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[x + \frac{ax^2}{2} \right]_2^3 = 1 \quad \Leftrightarrow 3 + \frac{9a}{2} - \left(2 + 2a \right) = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 + \frac{9a}{2} - 2 - 2a = 1 \quad \Leftrightarrow \frac{9a}{2} - 2a = 0 \quad \Leftrightarrow 9a - 4a = 0 \quad \Leftrightarrow 5a = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0$$

$$\Gamma 2. \text{ i) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\left(\frac{1}{x} - 1 \right)'}{(x - 1)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 2) = 1 - 2 = -1$$

Αρα η f παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = -1$
 οπότε ορίζεται εφαπτομένη της f στο $x_0 = 1$

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της (ϵ) στο $x_0 = 1$ είναι

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow y - 1 = -1(x - 1) \quad \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Η γωνία που σχηματίζει με τον $x'x$ είναι $\frac{3\pi}{4}$ αφού
 $\lambda = -1 = \epsilon\phi \frac{3\pi}{4}$



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Μ.Ε.

ΕΠΙΛΟΓΗ

Ιατροπούλου 3 & Χρ. Παγώνη 12 - Καλαμάτα

Τηλ.: 27210 95352 & 27210 96390, e-mail: info@epil.gr

Διευθ. Ιστοσελίδας: www.epil.gr

Γ3. Για $x < 1$: $f'(x) = 2x - 3$

Επειδή $x < 1 \Rightarrow 2x < 2 \Rightarrow 2x - 3 < -1 \Rightarrow f'(x) < -1 < 0$
Αρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1)$

Για $x > 1$ $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ άρα η f είναι γνησίως

φθίνουσα στο $[1, +\infty)$

και επειδή f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα 1-1

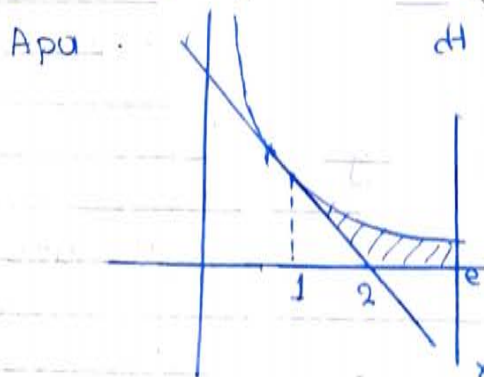
Αρα το $f((-\infty, +\infty)) \stackrel{f \downarrow}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (0, +\infty)$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Γ4. Είναι $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$

οπότε η f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη με εξοίσωση το σημείο επαφής $x_0 = 1$. Αρα $f(x) \geq -x + 2$ στο $[1, +\infty)$



Η $y = -x + 2$ τέμνει τον x στο $(2, 0)$

$$\text{Αρα } E(0) = \int_1^2 (f(x) - (-x + 2)) dx + \int_2^e f(x) dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x - 2 \right) dx + \int_2^e \frac{1}{x} dx$$

$$= \left[\ln|x| + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 + \left[\ln|x| \right]_2^e$$

$$x=e = \ln 2 + 2 - 4 - \left(\frac{1}{2} - 2 \right) + \ln e - \ln 2$$

$$= -2 + \frac{3}{2} + 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρώ $g(x) = \frac{f(x) - 2x}{x-1}$, $x \in (0,1) \cup (1,2)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \ell$

Άρα $f(x) = (x-1)g(x) + 2x$

οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)g(x) + 2x] = 0 \cdot \ell + 2 = 2$

Επίσης $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [\ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa] = 0 - 1 + \kappa = -1 + \kappa$

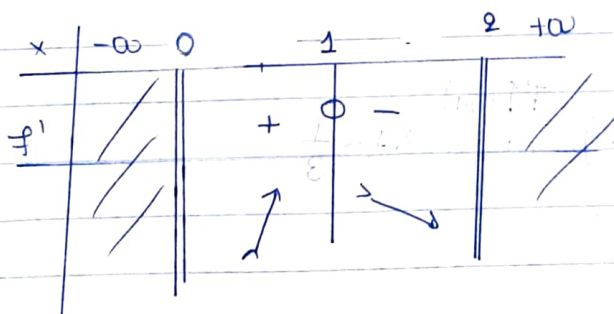
Άρα $-1 + \kappa = 2 \Leftrightarrow \kappa = 3$

Δ2. Η f παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με

$$f'(x) = \frac{1}{2-x} \cdot (-1) + \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2 - x + 2}{x^2(2-x)}$$

Επειδή $x^2 > 0$ και $2-x > 0$ άρα η f' είναι ομόσημη του αριθμητή

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -2$



$f((0,1)) \stackrel{\uparrow}{\underset{\text{βωξας}}{=}} (\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1)) = (-\infty, 2]$

με $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3] = \ln 2 - (-\infty) + 3 = +\infty$

$$f((1, 2)) \stackrel{\text{bivexms}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = (-\infty, 2)$$

$$\text{οπou } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right] = -\infty - \frac{1}{2} + 3 = -\infty$$

$$\mu\epsilon \lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(2-x) \stackrel{2-x=y}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty$$

Αρα

το $0 \in f((0,1])$ οπότε η $f(x)=0$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα x_1 στο $(0,1)$ ή επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι μοναδική

Το $0 \in f((1,+\infty))$ οπότε η $f(x)=0$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα x_2 στο $(1,2)$ ή επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι μοναδική.

Αρα $f(x_1)=0$ και

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{\frac{1}{3}} + 3 = \ln\frac{5}{3} - 3 + 3 = \ln\frac{5}{3} > 0$$

$$\alpha\phi\acute{o}\varsigma \frac{5}{3} > 1$$

$$\text{Αρα } f(x_1) < f\left(\frac{1}{3}\right) \stackrel{f \uparrow (0,1)}{\Rightarrow} x_1 < \frac{1}{3}$$

$$\Delta 3 \text{ Είναι } \frac{3f(\frac{1}{3})}{1-3x_1} = \frac{f(\frac{1}{3})}{\frac{1}{3}-x_1} = \frac{f(\frac{1}{3})-f(x_1)}{\frac{1}{3}-x_1}$$

Για την f ισχύουν οι υποθέσεις του ΘΗΤ στο $[x_1, \frac{1}{3}] \subseteq (0,1)$

αφού η f συνεχής στο $[x_1, \frac{1}{3}]$

f παραγωγίσιμη στο $(x_1, \frac{1}{3})$

Αρα υπάρχει 1 τουλάχιστον $\xi \in (x_1, \frac{1}{3})$ τέω

$$f'(\xi) = \frac{f(\frac{1}{3})-f(x_1)}{\frac{1}{3}-x_1} = \frac{3f(\frac{1}{3})}{1-3x_1}$$

και επειδή $f''(x) = -\frac{1}{(2-x)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$ στο $(0,1)$ είναι

μοναδική.

$\Delta 4$.i) F αρχική της f αρα $F'(x) = f(x)$

G αρχική της f αρα $G'(x) = f(x)$

$$\text{οπότε } F'(x) = G'(x) \Rightarrow F(x) = G(x) + C$$

$$\text{Για } x = x_1: F(x_1) = G(x_1) + C \text{ ή } 0 = G(x_1) + C \Leftrightarrow C = -G(x_1)$$

$$\text{Για } x = x_2: F(x_2) = G(x_2) + C \text{ ή } F(x_2) = 0 - G(x_1)$$

$$\Leftrightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0$$



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Μ.Ε.

ΠΙΛΟΤΗ

Ιατροπούλου 3 & Χρ. Παγώνη 12 - Καλαμάτα

Τηλ.: 27210 95352 & 27210 96390, e-mail: info@epil.gr

Διευθ. Ιστοσελίδας: www.epil.gr

ii) θεωρώ $Z(x) = x_1 F(x) + x_2 G(x) - x_1 - x_2 + 2x$ $x \in [x_1, x_2]$

Για την Z ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Βολζοινο
στο $[x_1, x_2]$ αφού

Z συνεχής στο $[x_1, x_2]$

$$\begin{aligned} Z(x_1) &= x_1 F(x_1) + x_2 G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1 = x_2 G(x_1) + x_1 - x_2 \\ &= x_2 (-F(x_2)) + x_1 - x_2 \\ &= -x_2 F(x_2) + (x_1 - x_2) < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(x_2) &= x_1 F(x_2) + x_2 G(x_2) - x_1 - x_2 + 2x_2 \\ &= x_1 F(x_2) + (x_2 - x_1) > 0 \end{aligned}$$

αφού για την F ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Βολζοινο
στο $[x_1, x_2]$ αφού

F συνεχής στο $[x_1, x_2]$

F παρική στο (x_1, x_2)

Υπάρχει 1 τουλάχιστον $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ τέω $F'(\xi_1) = \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$

$$f(\xi_1) = \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \Rightarrow F(x_2) = f(\xi_1)(x_2 - x_1) > 0$$

αφού $f([x_1, x_2]) \stackrel{\text{f.t.}}{=} \stackrel{\text{σν}}{=} [f(x_1), f(x_2)] = [0, 2]$

$$f([x_1, x_2]) \stackrel{\text{f.t.}}{=} \stackrel{\text{σν}}{=} [f(x_2), f(x_1)] = [0, 2]$$

Αρα $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ οπότε $f(\xi_1) > 0$

Αρα υπάρχει $\downarrow$ τουλάχιστον ρ_i στο (x_1, x_2)

τω $z(x) = 0$ και επειδή

$$z'(x) = x_1 F'(x) + x_2 G'(x) + 2 = x_1 f(x) + x_2 f(x) + 2 > 0$$

αφού $f(x) > 0$ στο (x_1, x_2)

η ρ_i είναι μοναδική

Επιμέλεια απαντήσεων:

Δραγώνας Μπάμπης

Γκιούλος Θεόδωρος

Διονυσοπούλου Σοφία

Μαθηματικοί

Φροντιστήριο Μ.Ε «ΕΠΙΛΟΓΗ» - Καλαμάτα

<http://www.epil.gr>