

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικό σελ. 135

A2. Θεωρία σχολικό σελ. 51

A3. Θεωρία σχολικό σελ. 23

A4. α. → Σωστό
β. → Λάθος
γ. → Σωστό
δ. → Σωστό
ε. → Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Θέτω $x+1 = y \Leftrightarrow x = y-1$ άρα η $f(x+1) = (x+1)e^{-x}$ γίνεται $f(y) = ye^{1-y}$
οπότε $f(x) = xe^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$

B2.

Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} \cdot (-1) = e^{1-x}(1-x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f(x)	↗		↘

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα $[1, +\infty)$

Παρουσιάζει ΟΜ στο 1 το $f(1) = 1$

B3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων με
 $f''(x) = e^{1-x}(1-x) \cdot (-1) - e^{1-x} = e^{1-x}(-1+x-1) = e^{1-x}(x-2)$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	↘		↗

η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και κυρτή $[2, +\infty)$. Επειδή εκατέρωθεν του 2 αλλάζει η κυρτότητα και υπάρχει η εφαπτομένη σ' αυτό το $(2, f(2)) = (2, \frac{2}{e})$ είναι Σ.Κ..

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\text{Στο } -\infty: \lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} \stackrel{1-x=y}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$$

Αρα δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

$$\text{Στο } +\infty: \lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} \stackrel{1-x=y}{=} \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{1-x} \stackrel{1-x=y}{=} \lim_{y \rightarrow -\infty} (1-y)e^y$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-y}{e^{-y}} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{DLH} \frac{-1}{-e^{-y}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$$

Αρα η $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

B4.

$$\text{I. } f(-\infty, 1] \stackrel{f \uparrow}{=} \left(\lim_{\Sigma \text{YN}} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 1] \text{ με}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{1-x} \stackrel{1-x=y}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} (1-y)e^y = (-\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$f(1, +\infty) \stackrel{f \downarrow}{=} \left(\lim_{\Sigma \text{YN}} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = (0, 1)$$

Αρα το σημείο Σ.Τ. της f είναι το $(-\infty, 1]$

II. Αν $\lambda \leq 0$ τότε $\lambda \in f(-\infty, 1]$ άρα η $f(x) = \lambda$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(-\infty, 1)$ και επειδή η f γνησίως αύξουσα και μοναδική

Αν $0 < \lambda < 1$ τότε το $\lambda \in f(-\infty, 1]$ άρα $f(x) = \lambda$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(-\infty, 1)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και μοναδική

Το $\lambda \in f(1, +\infty)$ άρα η $f(x) = \lambda$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(1, +\infty)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι μοναδική

Αν $\lambda = 1$, τότε $\lambda \in f(-\infty, 1]$ άρα η $f(x) = \lambda$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(-\infty, 1]$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι μοναδική. Αυτή είναι $x = 1$

Αν $\lambda > 1$ τότε το $\lambda \notin f(-\infty, 1]$ και $f(1, +\infty)$ άρα η $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής $(-\infty, 0)$ και $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$ ως άθροισμα συνεχών

$$\text{Στο } x_0 = 0: \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^3 - 3x^2 - x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 1$$

$$f(0) = 1$$

Άρα η f είναι συνεχής στο 0 άρα και στο $\square$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(ax^2 - 3x - 1)}{x} = -1$$

Άρα δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

Γ2.

i) Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ ως τριγωνομετρική

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ ως τριγωνομετρική $f'(x) = -\eta\mu x$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1 \end{array} \right\} f(0) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

Άρα η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

$$\text{ii) } f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = \pi \quad \xi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Γ3.

Έστω $(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής τότε αφού η f είναι παράλληλη στον $x'x$ ισχύει $f'(x_0) = 0$ με $x_0 < 0$

Για $x < 0$ η f παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1 \text{ οπότε } f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha x_0^2 - 6x_0 - 1 = 0 \text{ με}$$

$$\Delta = 36 + 12\alpha = 12(3 + \alpha) < 0$$

Άρα δεν υπάρχει σημείο με αρνητική τετμημένη που να έχει εφαπτομένη στον $x'x$

Γ4.

$$\text{Είναι } f'(x) = \begin{cases} 3\alpha x^2 - 6x - 1, & x < 0 \\ -\eta\mu x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Στο $(-\infty, 0)$ η $f'(x) < 0$ αφού $\Delta < 0$ και $\alpha < 0$

$$\text{Στο } \left(0, \frac{3\pi}{2}\right] \text{ η } f'(x) = -\eta\mu x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pi$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x > 0 \Leftrightarrow \eta\mu x < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x < 0 \Leftrightarrow \eta\mu x > 0 \Leftrightarrow x \in (0, \pi)$$

x	$-\infty$	0	π	$3\pi/2$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	↘		↗	

Άρα η f παρουσιάζει ΟΕ στο π άρα $f(x) \geq f(\pi) \Leftrightarrow f(x) \geq -1 \forall x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

θα δείξω ότι $\ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} = 0$ έχει μοναδική ρίζα που ανήκει στο $(1, e)$

$$\text{Θεωρώ } h(x) = \ln x - \frac{1}{x}, x > 0$$

Για την h ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1, e]$ αφού

h συνεχής στο $[1, e]$ ως διαφορά συνεχών

$$\left. \begin{array}{l} h(1) = -1 < 0 \\ h(e) = 1 - \frac{1}{e} > 0 \end{array} \right\} h(1)h(e) < 0$$

Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ τω $h(x_0) = 0$ και επειδή $h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ στο $(0, +\infty)$ η $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον ρίζα και επειδή $h \uparrow$ είναι μοναδική και αυτή ανήκει $(1, e)$

Δ2.

η f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_0}{x \cdot x_0}$ αφού από το

$$\Delta 1 \text{ ισχύει } \ln x_0 = \frac{1}{x_0}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - x_0 = 0 \Leftrightarrow x = x_0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x - x_0 > 0 \Leftrightarrow x > x_0$$

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$			

Άρα η f παρουσιάζει ΟΕ στο x_0 το

$$f'(x_0) = (\ln x_0)(x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 = \frac{1}{x_0}(x_0 + 1) - \frac{1}{x_0} - 1 = 1 + \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0} - 1 = 0$$

Δ3.

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow xe^{-x} = \frac{x_0^{x+1}}{e^{x+1}}$$

$$\Leftrightarrow xe = x_0^{x+1} \text{ όπου } x_0^{x+1}, e > 0 \text{ άρα } x > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln xe = \ln x_0^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \ln x + 1 = (x + 1) \ln x_0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1) \ln x_0 - \ln x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0$$

Όμως $f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ με το ίσον για $x = x_0$

Άρα η $x = x_0$

Οι h, g παραγωγίσιμες με

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

$$h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \ln \frac{x_0}{e} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} (\ln x_0 - 1)$$

$$\text{Άρα } h'(x_0) = \frac{x_0^{x_0+1}}{e^{x_0+1}} \cdot \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) = \frac{x_0^{x_0+1}}{e^{x_0+1}} \cdot \frac{1-x_0}{x_0}$$

$$= \frac{x_0^{x_0}}{e^{x_0} \cdot e} (1-x_0) = e^{-x_0} \cdot (1-x_0) \cdot \frac{x_0^{x_0}}{e}$$

$$\text{και } g'(x_0) = e^{-x_0}(1-x_0)$$

Αρκεί να δείξω ότι

$$\frac{x_0^{x_0}}{e} = 1 \Leftrightarrow x_0^{x_0} = e \stackrel{x_0 \in (1,e)}{\Leftrightarrow} \ln x_0^{x_0} = \ln e \Leftrightarrow x_0 \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0} \text{ ισχύει}$$

Άρα έχουν κοινή εφαπτομένη

Δ4.

$$d(x) = \sqrt{(\varphi(x) - f(x))^2 + (x - x)^2} = \sqrt{(\varphi(x) - f(x))^2} = |\varphi(x) - f(x)| = f(x) - \varphi(x), \\ x > 0$$

- ✓ Αν φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε η d παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 εσωτερικό σημείο του π.ο. και η d παραγωγίσιμη σ' αυτό, τότε από Θεώρημα Fermat

$$d'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - \varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = \varphi'(x_0) \Leftrightarrow \varphi'(x_0) = 0$$

άρα το x_0 κρίσιμο σημείο

Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο

Επιμέλεια απαντήσεων:

Δραγώνας Μπάμπης

Γκιούλος Θεόδωρος

Διονυσοπούλου Σοφία

Μαθηματικοί

Φροντιστήριο Μ.Ε «ΕΠΙΛΟΓΗ» - Καλαμάτα

<http://www.epil.gr>