

(1)

Απαντήσεις

A1. Θεωρία

A2. Θεωρία

A3. Θεωρία

A4. α) Ψ

β) $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. Όμως $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει

$$\text{απο } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

A5. α) Ξ

β) Ξ

γ) Λ

ΘΕΩΡΙΑ Β

$$B1. \text{ Για } x \neq 3 \quad f'(x) = \frac{3(x-3) - (3x+1)}{(x-3)^2} = \frac{-10}{(x-3)^2} < 0$$

Αρα $f \downarrow$ στα $(-\infty, 3)$ και $(3, +\infty)$ άρα 1-1 στα $(-\infty, 3)$ και $(3, +\infty)$

$$\bullet f(-\infty, 3) \xrightarrow[\text{ο.ν.}]{f \downarrow} (\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) = (-\infty, 3)$$

$$\mu\epsilon \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (3x+1) \frac{1}{x-3} = 10 \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$\bullet f(3, +\infty) \xrightarrow[\text{ο.ν.}]{f \downarrow} (\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (3, +\infty)$$

$$\mu\epsilon \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (3x+1) \frac{1}{x-3} = 10 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

Επειδή τα εύνοδα τιμών είναι ξένα μεταξύ τους η f είναι 1-1 στο $\mathbb{R} - \{3\}$

(2)

$$B2. Df^{-1} = f(-\infty, 3) \cup f(3, +\infty) = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$\text{Επιπλέον } f(x) = \psi \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x-3} = \psi \Leftrightarrow 3x+1 = x\psi - 3\psi$$

$$\Leftrightarrow x(\psi-3) = 3\psi+1 \quad (1)$$

$$\text{Αν } \psi-3=0 \Leftrightarrow \psi=3 \quad \text{τότε } 0=1 \text{ άτοπο}$$

$$\text{Αν } \psi-3 \neq 0 \Leftrightarrow \psi \neq 3 \quad \text{τότε}$$

$$\text{η (1)} \Rightarrow x = \frac{3\psi+1}{\psi-3}$$

$$\text{Πρέπει } x \in Df \Rightarrow x \neq 3 \Leftrightarrow \frac{3\psi+1}{\psi-3} \neq 3 \Leftrightarrow 3\psi+1 \neq 3\psi-9$$

$$\Leftrightarrow 1 \neq -9 \text{ ισχύει}$$

$$\text{Αρα } f^{-1}(\psi) = \frac{3\psi+1}{\psi-3}, \quad \psi \neq 3$$

$$\text{η } f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-3}, \quad x \neq 3$$

$$\text{Επειδή } Df = Df^{-1}$$

$$f(x) = f^{-1}(x) \quad \forall x \neq 3$$

$$\text{εχουμε } f = f^{-1}$$

B3

$$Df \circ f = \left\{ \begin{array}{l} x \in Df \\ \text{και} \\ f(x) \in Df \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq 3 \\ f(x) \neq 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq 3 \\ \frac{3x+1}{x-3} \neq 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq 3 \\ 1 \neq -9 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \neq 3$$

$$\text{Αρα } Df \circ f = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$\text{και } (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{3(3x+1)}{x-3} + 1}{\frac{3x+1}{x-3} - 3} = \frac{10x}{10} = x$$

(3)

$$\underline{\eta} \quad (f \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$$

$$B4. \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{3x+1}{x-3} = 0$$

$$\left| \frac{3x+1}{x-3} \cdot \eta \right| = \left| \frac{3x+1}{x-3} \right| \cdot \left| \eta \right| < \left| \frac{3x+1}{x-3} \right| \cdot 1 \\ = \left| \frac{3x+1}{x-3} \right|$$

$$\text{Αρα} \quad - \left| \frac{3x+1}{x-3} \right| < \frac{3x+1}{x-3} \cdot \eta < \left| \frac{3x+1}{x-3} \right|$$

$$\left. \begin{aligned} \mu\epsilon \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \left(- \left| \frac{3x+1}{x-3} \right| \right) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \left| \frac{3x+1}{x-3} \right| &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} f(x) \cdot \eta = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

$$Γ1. \quad (ABΓ) = \frac{1}{2} BΓ \cdot ΑΗ \quad (1) \quad \text{όπου}$$

$$\text{στο } \triangle OBH: \quad \frac{6\omega\theta}{OB} = \frac{OH}{1} \Rightarrow 6\omega\theta = OH \Rightarrow OH = 6\omega\theta$$

$$\eta\mu\theta = \frac{BH}{OB} \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{BH}{1} \Rightarrow BH = \eta\mu\theta$$

$$\text{Αρα} \quad (1) \Rightarrow (ABΓ) = \frac{2\eta\mu\theta(1+6\omega\theta)}{2} = \eta\mu\theta(1+6\omega\theta)$$

$$\text{όπου} \quad BΓ = 2BH = 2\eta\mu\theta$$

$$\text{Αρα} \quad \varepsilon(\theta) = \eta\mu\theta(1+6\omega\theta) \quad \theta \in (0, \pi)$$

(4)

$$\begin{aligned}
 \Gamma 2. \quad E'(\theta) &= 6\omega\theta(1+6\omega\theta) - \eta\mu^2\theta \\
 &= 6\omega\theta + 6\omega^2\theta - \eta\mu^2\theta \\
 &= 6\omega\theta + 6\omega^2\theta - (1-6\omega^2\theta) \\
 &= 26\omega^2\theta + 6\omega\theta - 1 \\
 &= 2(6\omega\theta + 1)(6\omega\theta - \frac{1}{2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E'(\theta) = 0 &\Leftrightarrow 6\omega\theta = -1 \quad \text{οι δύνανται στο } (0, \pi) \\
 \text{ή } 6\omega\theta &= \frac{1}{2} \quad \theta \in (0, \pi) \quad \theta = \pi/3
 \end{aligned}$$

$$E'(\theta) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6\omega\theta + 1 > 0 \quad 6\omega\theta > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 6\omega\theta > 6\omega \frac{\pi}{3} \quad \text{στο } 0 < \theta < \frac{\pi}{3}$$

θ	0	$\pi/3$	π
E'	///	+	-
E	///	↗	↘
		ΟΗ	

$E'(\theta) < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} < \theta < \pi$

Για $\theta = \pi/3$ το εμβαδόν
μεγιστοποιείται.

Γ3. Θέσο η $E(\theta) = \frac{3}{4}$ έχει ακριβώς 2 λύσεις

$$\bullet \quad E(0, \pi/3) \quad \frac{E'}{6\omega} \left(\lim_{\theta \rightarrow 0^+} E(\theta), \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} E(\theta) \right) = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$\mu\epsilon \quad \lim_{\theta \rightarrow 0^+} E(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} (1+6\omega\theta)\eta\mu\theta = 0$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} E(\theta) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} = E\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\bullet \quad E\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right) \quad \frac{E'}{6\omega} \left(\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} E(\theta), E\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$\mu\epsilon \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} E(\theta) = (1+6\omega\pi)\eta\mu\pi = 0$$

(5)

- Το $\frac{3}{4} \in E(0, \frac{\pi}{3})$ οπότε η $E(\theta) = \frac{3}{4}$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα $\theta_1 \in (0, \frac{\pi}{3})$ κ' επειδή η $E \uparrow$ είναι μοναδική
- Το $\frac{3}{4} \in E(\frac{\pi}{3}, \pi)$ οπότε η $E(\theta) = \frac{3}{4}$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα $\theta_2 \in (\frac{\pi}{3}, \pi)$ κ' επειδή η $E \downarrow$ είναι μοναδική

Γ4. ΘΥΤ για την E σε καθένα από τα $[\theta_1, \frac{\pi}{3}]$ κ' $[\frac{\pi}{3}, \theta_2]$

- Η E συνεχής στα $[\theta_1, \frac{\pi}{3}]$ και $[\frac{\pi}{3}, \theta_2]$

- Η E παρική στα $(\theta_1, \frac{\pi}{3})$ και $(\frac{\pi}{3}, \theta_2)$

Αρα $\exists \xi_1 \in (\theta_1, \pi/3)$ τω $E'(\xi_1) = \frac{E(\pi/3) - E(\theta_1)}{\pi/3 - \theta_1}$

$$\Rightarrow (\frac{\pi}{3} - \theta_1) E'(\xi_1) = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} \quad (1)$$

$\exists \xi_2 \in (\frac{\pi}{3}, \theta_2)$ τω $E'(\xi_2) = \frac{E(\pi/3) - E(\theta_2)}{\pi/3 - \theta_2}$

$$\Rightarrow (\frac{\pi}{3} - \theta_2) E'(\xi_2) = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} \quad (2)$$

Από (1), (2) $\Rightarrow$

$$(\frac{\pi}{3} - \theta_1) E'(\xi_1) = (\frac{\pi}{3} - \theta_2) E'(\xi_2)$$

(6)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$, $x > 0$

Παρατηρώ $f'(1) = 0$ κ' επειδή
 $f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ άρα $f' \uparrow$ οπότε το 1

μοναδική λύση

x	0	1
f'		+
f		OE

Για $0 < x < 1$ $f'(x) < f'(1) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$
 Για $x > 1$ $f'(x) > f'(1) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

Η f παρουσιάζει ΟΕ στο 1 το $f(1) = -\ln \lambda$
 Άρα το σημείο του ακροτατού είναι
 το $(1, -\ln \lambda)$ που ανήκει στην ευθεία $x=1$
 μιας και $-\ln \lambda \in \mathbb{R} \quad (\forall \lambda > 0)$

Δ2. $x^x \geq \lambda x \quad x > 0 \Leftrightarrow \ln x^x \geq \ln(\lambda x) \Leftrightarrow x \ln x \geq \ln(\lambda x) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \ln x - \ln(\lambda x) \geq 0$
 $\Leftrightarrow f(x) \geq 0$
 $\Leftrightarrow \inf f \geq 0 \Leftrightarrow -\ln \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \ln \lambda \leq 0$
 $\Leftrightarrow \ln \lambda \leq \ln 1 \Leftrightarrow 0 < \lambda \leq 1$

Άρα η μεγαλύτερη τιμή του λ είναι $\lambda = 1$

Δ3. Έστω $(x_0, g(x_0))$ το σημείο επαφής της g με την ευθεία. Τότε

$$\epsilon: y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) \quad (1)$$

$$\text{με } g'(x) = (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (\ln x + 1) = g(x) (\ln x + 1) \quad (2)$$

Κι επειδή διέρχεται από το $(0,0)$

$$\text{η (1)} \Rightarrow 0 - g(x_0) = g(x_0) (\ln x_0 + 1) (-x_0)$$

$$\Leftrightarrow 1 = x_0 \ln x_0 + x_0$$

$$\Leftrightarrow \ln x_0 + 1 - \frac{1}{x_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \quad \text{οπότε από το } \Delta 1 \Rightarrow x_0 = 1$$

$$\text{Αρα } \epsilon: y - g(1) = g'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = 1(x - 1) \Leftrightarrow y = x$$

Αρα η $y = x$ είναι η μοναδική ευθεία της g που περνάει από το $(0,0)$

Δ4. i) Για $x \in (0, +\infty)$ η $h(x) = x^x = e^{x \ln x}$ συνεχώς ως σύνθεση των συνεχών $x \ln x$ και e^x

$$\text{Στο } x_0 = 0: \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = \lim_{\psi \rightarrow 0} e^{\psi} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{με } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \end{aligned}$$

Αρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0)$ οπότε η h συνεχής στο 0
αρα και στο $[0, +\infty)$

(8)

ii) θεωρούμε $\Phi(x) = x^{2020} (3-2 \int_1^2 g(t) dt) + (1-x) \int_0^1 h(u-t) dt$,
 $x \in [0,1]$

• Η Φ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνύμιο

• $\Phi(0) = \int_0^1 h(u-t) dt \xrightarrow[dt=-du]{1-t=u} - \int_1^0 h(u) du = \int_0^1 h(u) du > 0$

Πα $t=0: u=1$

Πα $t=1: u=0$

γιατί $h(u) \geq 0$ στο $[0,1]$ με την h να μην είναι παντού 0 στο $[0,1]$

άρα $\int_0^1 h(u) du > 0 \Rightarrow \Phi(0) > 0$

• $\Phi(1) = 3-2 \int_1^2 g(t) dt < 0$

όπου $g'(x) = g'(x) (1+ux+1) + g(x) \cdot \frac{1}{x}$
 $\stackrel{(2)}{=} g(x) (1+ux+1)^2 + g(x) \frac{1}{x}$

$= g(x) \left[(1+ux+1)^2 + \frac{1}{x} \right] > 0$

Αρα η $g \uparrow$ στο $(0,+\infty)$ οπότε η g βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=x$ με το $=$ για $x=1$

Αρα $g(x) \geq x$ με το $=$ για $x=1$
 οπότε $\int_1^2 g(x) dx > \int_1^2 x dx \Rightarrow \int_1^2 g(x) dx > \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2$

$\Rightarrow \int_1^2 g(x) dx > 2 - \frac{1}{2} \Rightarrow \int_1^2 g(x) dx > \frac{3}{2}$

(9)

$$\Leftrightarrow 2 \int_1^2 g(x) dx > 3 \Leftrightarrow 3 - 2 \int_1^2 g(x) dx < 0 \Leftrightarrow \Phi(1) < 0$$

Από το Θ. Bolzano υπάρχει 1 τουλάχιστον ξ στο $(0,1)$
το $\Phi(\xi) = 0$