

1

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία

A2. Θεωρία

A3. α) ψ

β) $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Ομως $f'(x) = 3x^2 \geq 0$

A4. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. $Df = (1, +\infty)$

$Dg = \mathbb{R}$

$$Df \circ g = \begin{cases} x \in Dg \\ \text{και} \\ g(x) \in Df \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ e^x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$$

Αρα $Df \circ g = (0, +\infty)$

με τύπο $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$

B2. Η $f \circ g$ παρλη ως ηνδικο παρληυν με

$$(f \circ g)'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - (e^x + 2)e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-3e^x}{(e^x - 1)^2} < 0$$

Αρα η $f \circ g \downarrow$ οπότε 1-1 στο $(0, +\infty)$

(2)

$$D(f \circ g)^{-1} = (\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} (f \circ g)(x)) = (1, +\infty)$$

$$\mu \in \lim_{x \rightarrow 0^+} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + 2) \frac{1}{e^x - 1} = 3(+\infty) = +\infty$$

$$\text{οπότε } x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \text{ κ' } \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) = 0$$

$$\text{αρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 + 2/e^x)}{e^x(1 - 1/e^x)} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

$$\text{Τότε } (f \circ g)(x) = \varphi \Leftrightarrow \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \varphi$$

$$\Leftrightarrow e^x + 2 = e^x \varphi - \varphi$$

$$\Leftrightarrow \varphi + 2 = e^x(\varphi - 1)$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{\varphi + 2}{\varphi - 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln \left(\frac{\varphi + 2}{\varphi - 1} \right)$$

$$\text{Αρα η } (f \circ g)^{-1} = \ln \left(\frac{x+2}{x-1} \right), x \in (1, +\infty)$$

$$\begin{aligned} \text{Β3. Η } \Phi \text{ παρ/τη στο } (1, +\infty) \text{ ως συν/θεση παρ/των} \\ \mu \in \Phi'(x) = \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+2}{x-1} \right)' = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} \\ = \frac{-3}{(x+2)(x-1)} < 0 \text{ άρα η } \Phi \text{ } \downarrow \text{ στο } (1, +\infty) \end{aligned}$$

(3)

$$B4. \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \ln \varphi = +\infty$$

$$\text{Θετω } \varphi = \frac{x+2}{x-1} \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+2) \frac{1}{x-1}$$

$$= 3 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \lim_{\varphi \rightarrow 1} \ln \varphi = 0$$

$$\text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Απού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι και στο 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + \lambda \sin x) = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{1-x} - \ln \lambda \right) = 1 - \ln \lambda$$

$$f(0) = 1 - \ln \lambda$$

$$\text{Άρα } 1 - \ln \lambda = \lambda \quad \text{Θεωρώ } K(\lambda) = \lambda + \ln \lambda - 1, \lambda > 0$$

$$\text{Απορροαυρώ } K(1) = 0$$

$$\text{και } K'(\lambda) = 1 + \frac{1}{\lambda} > 0 \quad \text{άρα } K \uparrow \text{ στο } (0, +\infty)$$

$$\Rightarrow 1 \text{ μοναδική ρίζα οπότε } \lambda = 1$$

(4)

$$\Gamma 2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{60\nu x - 1}{x} \right) = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - 1 + x}{x(1-x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-x} = 1$$

Αρα η f παραγνη στο 0 με $f'(0) = 1$.

οποτε επειδη $f'(0) = \epsilon\omega = 1 \Rightarrow \omega = \pi/4$

$\Gamma 3$. Κρισιμα σημεια αναζητούμε στα εσωτερικα:
σημεια του π.ο. όπου η f' δεν υπαρχει.
κ' $f'(x) = 0$.

Επειδη το $f'(0)$ υπαρχει το 0 δεν ειναι
κρισιμο σημειο

$$\text{Για } x < 0: f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$$

$$\text{Για } 0 < x < \frac{3\pi}{2}: f'(x) = \sin x - \eta\mu x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \eta\mu x$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\omega x = 1$$

$$x \in (0, 3\pi/2) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

ΗΔ

$\Gamma 4$. Η εξίσωση της εφαπτης στο $(a, f(a))$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Γεμνει τον x οποτε $0 - f(a) = f'(a)(x - a)$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{1-a} = \frac{1}{(1-a)^2}(x-a)$$

5

$$\Leftrightarrow -1 + a = x - a \quad \Leftrightarrow x = 2a - 1$$

$$\text{οπότε } x(t) = 2a(t) - 1 \quad \text{άρα}$$

$$x'(t) = 2a'(t).$$

$$\text{Για } t=t_0 \Rightarrow x'(t_0) = 2a'(t_0) = -\frac{2a(t_0)}{3} = -\frac{2(-1)}{3} = \frac{2}{3} \text{ m/s}$$

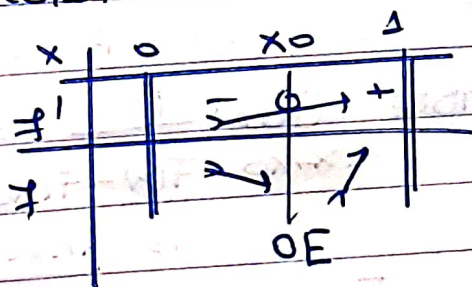
ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \quad f'(x) = e^x + 2x - e$$

$$f''(x) = e^x + 2 > 0 \quad \text{οπότε } f' \uparrow$$

$$\text{Άρα } f'(0,1) \stackrel{f' \uparrow}{\underset{\text{SW}}{=}} (\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x)) = (1-e, 2)$$

Το $0 \in f'(0,1)$ οπότε η $f'(x) = 0$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$ κ' επειδή η $f' \uparrow$ είναι μοναδική.



$$\begin{aligned} \text{Για } x > x_0 & \stackrel{f' \uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \\ \text{Για } x < x_0 & \stackrel{f' \uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \end{aligned}$$

$$\text{Τότε } f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } f(x_0) &= e - 2x_0 + x_0^2 - ex_0 - 1 \\ &= x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1 \end{aligned}$$

(6)

$$\Delta 2. \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1 + (f(x) - f(x_0)) \cdot \eta \mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right)}{f(x) - f(x_0)} \right]$$

$$\stackrel{\frac{1+\infty}{0+}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \left[1 + (f(x) - f(x_0)) \cdot \eta \mu \frac{1}{x - x_0} \right] \frac{1}{(f(x) - f(x_0))} = (\infty)(\infty) = \infty$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$$

$$\left| (f(x) - f(x_0)) \cdot \eta \mu \frac{1}{x - x_0} \right| \leq |f(x) - f(x_0)| \cdot 1 = |f(x) - f(x_0)| \Rightarrow \rightarrow$$

$$\Rightarrow -|f(x) - f(x_0)| \leq (f(x) - f(x_0)) \cdot \eta \mu \frac{1}{x - x_0} \leq |f(x) - f(x_0)| \Rightarrow \Sigma \epsilon$$

$$\mu \lim_{x \rightarrow x_0} (-|f(x) - f(x_0)|) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (|f(x) - f(x_0)|) = 0$$

$$\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) \eta \mu \frac{1}{x - x_0} = 0$$

$$\text{και } f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (0, 1) \quad \text{οπότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = \infty$$

$$\Delta 3. \text{ θεωρούμε } h(x) = f(x) + x - x_0 \quad x \in [x_0, 1]$$

· Η h συνεχής στο $[x_0, 1]$ ως αθρ. συνεχών

$$\cdot h(x_0) = f(x_0) < 0$$

$$\text{οπότε } f(0, x_0) \frac{\partial f}{\partial w} \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (f(x_0), 0)$$

$$h(1) = f(1) + 1 - x_0 = e + 1 - e - 1 + 1 - x_0 = (1 - x_0) > 0$$

$$\text{Αρα } h(x_0)h(1) < 0$$

οπότε από ΘΒ $\exists$ τουλάχιστον $p \in (x_0, 1)$ τω $h(p) = 0$

· $f(p) = x_0 - p$ (1) και επειδή $h'(x) = f'(x) + 1 > 0$ στο $(x_0, 1)$

είναι μοναδική

(7)

$$\Delta 4. \text{ Θδο } f(x_0) > f(p) (f'(x) + 1)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) \geq f(p) f'(x) + f(p)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) - f(p) > f(p) f'(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(p)}{x_0 - p} < f'(x) \quad (2)$$

$$\mu\epsilon \quad f(p) = x_0 - p < 0$$

ΘΜΤ για f στο $[x_0, p]$.

f συνεχώς στο $[x_0, p]$

f παρμένη στο (x_0, p)

$$\text{Αρα } \exists \xi \in (x_0, p) \text{ τέ } f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(p)}{x_0 - p}$$

$$\text{Ομως } \xi < x \quad \Leftrightarrow \quad f'(\xi) < f'(x)$$

$$\mu\epsilon \quad x_0 < \xi < p < x < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(p)}{x_0 - p} < f'(x)$$