

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1. α) Σχολικό βιβλίο σελ 15

β) i) Μια συνάρτηση f έχει αντίστροφη όταν είναι 1-1 στο A .

ii) Θεωρία σελ. 35-36

A2. Θεωρία σχολικό σελ. 142

A3. Θεωρία σχολικό σελ. 135

A4. α) $\rightarrow$ Λάθος π.χ. $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ Είναι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Όμως η f δεν είναι σταθερή.

β) $\rightarrow$ Λάθος, γιατί πρέπει η f να είναι συνεχής στο x_0 ,

$$\text{π.χ. } f(x) = \begin{cases} 2x & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ x^2, & x > 0. \end{cases} \text{ με } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0 \text{ και } f(0) = 1$$

γ) γ, γιατί: $E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) + E(\Omega_3) = 2 - 1 + 3 = 4$

ΘΕΜΑ Β

B1. Η $y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + \lambda) = 2 \Leftrightarrow 0 + \lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

μιας και $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$

B2. Θεωρώ $g(x) = f(x) - x, x \in [2, 3]$ δηλαδή $g(x) = e^{-x} + 2 - x, x \in [2, 3]$

- g συνεχής στο $[2, 3]$ ως άθροισμα συνεχών e^{-x} (σύνθεση των συνεχών $e^x, -x$) και $2 - x$ (πολυωνυμική)

$$\left. \begin{aligned} g(2) &= f(2) - 2 = e^{-2} + 2 - 2 = e^{-2} > 0 \\ g(3) &= f(3) - 3 = e^{-3} + 2 - 3 = e^{-3} - 1 < 0 \end{aligned} \right\} g(2)g(3) < 0$$

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 = 0$$

Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων με $g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$, η g είναι $\downarrow$ είναι στο $[2, 3]$ οπότε το x_0 είναι μοναδική ρίζα

B3. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -e^{-x} < 0 \Rightarrow f \downarrow$ στο $\mathbb{R}$
 Οπότε και 1-1 άρα υπάρχει και η f^{-1}

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι $D_{f^{-1}} = f(-\infty, +\infty) \stackrel{f \downarrow}{=} (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) = (2, +\infty)$

Είναι $f(x) = \psi \Leftrightarrow x = f^{-1}(\psi)$ οπότε

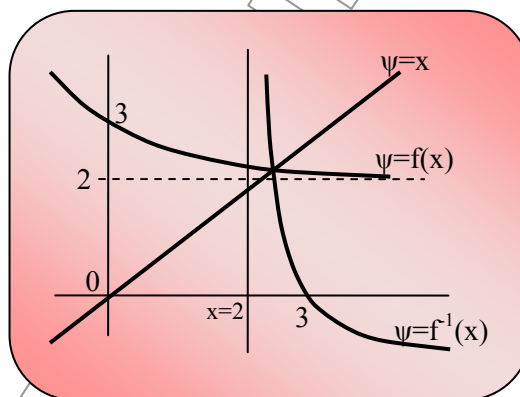
$$f(x) = \psi \Leftrightarrow e^{-x} + 2 = \psi \Leftrightarrow e^{-x} = \psi - 2 \text{ με } \psi > 2$$

$$\Leftrightarrow \ln e^{-x} = \ln(\psi - 2) \Leftrightarrow -x = \ln(\psi - 2) \Leftrightarrow x = -\ln(\psi - 2)$$

Άρα $f^{-1}(x) = -\ln(x - 2), x > 2$

B4. βρίσκουμε $\lim_{x \rightarrow 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-\ln(x - 2)) \stackrel{x-2=\psi}{=} \lim_{\psi \rightarrow 0^+} (-\ln \psi) = -(-\infty) = +\infty$

Άρα $x = 2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή η f παραγωγίσιμη στο 1, θα είναι και συνεχής στο 1

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$ με

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + \alpha) = 1 + \alpha \\ f(1) &= 1 + \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 + \alpha = 1 + \beta \Rightarrow \alpha = \beta \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + \beta x) = 1 + \beta$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 οπότε $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

• Με

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - a^{(1)}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - \beta}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} + \frac{\beta(x - 1)}{x - 1} \right] = 1 + \beta$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} - 0}{x-1} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1}}{1} = e^0 = 1$

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + \alpha - 1 - \alpha}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$

Άρα $1 + \beta = 2 \Rightarrow \beta = 1$, άρα $\alpha = 1$ από (1)

Γ2. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ e^{x-1} + x & x < 1 \end{cases}$

Για $x > 1$ $f'(x) = 2x > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$

Για $x < 1$ $f'(x) = e^{x-1} + 1 > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1)$

και επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 1$ άρα η f είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$

$f(-\infty, +\infty) \stackrel{f \uparrow}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$

Άρα $f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Γ3.

i. $f(-\infty, 0) \stackrel{f \uparrow}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right) = (-\infty, e^{-1})$

Άρα το $0 \in f(-\infty, 0)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα σ' αυτό έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (-\infty, 0)$

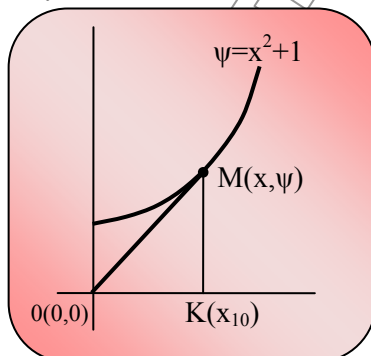
ii. Θέλω να δείξω ότι η εξίσωση $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$ αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$

Επειδή έχω $f(x_0, +\infty) \stackrel{f \uparrow}{=} (0, +\infty)$ η $f(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0, +\infty)$ οπότε

$f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)(f(x) - x_0) = 0 \stackrel{f(x) > 0}{\Leftrightarrow} f(x) - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x) = x_0$

Αλλά $f(x) > 0$ και $x_0 < 0$ οπότε αδύνατη

Γ4.



$$\text{Είναι } E = \frac{1}{2} |x| |\psi| = \frac{1}{2} |x| |x^2 + 1| \stackrel{x > 0}{=} \frac{1}{2} x (x^2 + 1)$$

$$\text{Άρα } E(t) = \frac{1}{2} x(t) (x^2(t) + 1) = \frac{1}{2} (x^3(t) + x(t)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E'(t) = \frac{1}{2} (3x^2(t)x'(t) + x'(t)) \stackrel{t=t_0}{\Rightarrow} E'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2^6 = 10 + 18 = 28 \mu\text{ον}^2 / \text{sec}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η εφαπτομένη της C_f στο $(1,1)$ είναι

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = f'(1)x - f'(1) + f(1) \text{ και}$$

Επειδή η $\varepsilon: \psi = -x + 2$ εφάπτεται της C_f

$$\begin{cases} f'(1) = -1 \\ -f'(1) + f(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(1) = -1 \quad (1) \\ f(1) = 1 \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Με } f \text{ παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{(x-1)}{x^2 - 2x + 2} \cdot 2(x-1) + a =$$

$$= \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} + a$$

$$\text{Άρα } (1) \Rightarrow f'(1) = -1 \Rightarrow \alpha = -1$$

$$(2) \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow -1 + \beta = 1 \Rightarrow \beta = 2$$

Δ2.

$$E(\Omega) = \int_1^2 |f(x) - (-x + 2)| dx = \int_1^2 |(x-1) \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2 + x - 2| dx = \int_1^2 |(x-1) \ln(x^2 - 2x + 2)| dx$$

$$\text{Θέτω } x^2 - 2x + 2 = u \text{ οπότε } (2x - 2) dx = du \Leftrightarrow (x - 1) dx = \frac{1}{2} du$$

$$\text{Για } x = 1 \text{ τότε } u = 1 \text{ και για } x = 2 \text{ τότε } u = 2$$

Άρα

$$E(\Omega) = \int_1^2 \frac{1}{2} |\ln u| du = \int_1^2 \frac{1}{2} \ln u du = \frac{1}{2} \int_1^2 u' \ln u du = \frac{1}{2} [u \ln u]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 u \cdot \frac{1}{u} du = \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) \tau.μ.$$

Δ3. Η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) + 1 = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 + 1 = \ln((x-1)^2 + 1) + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0 \text{ με την}$$

ισότητα να ισχύει για $x = 1$

Ισοδύναμα έχω

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + 2 - \frac{3}{2} \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + 2 \Leftrightarrow$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \geq f(\lambda) \Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2} \quad (3)$$

ΘΜΤ για την $f\left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right]$

- f συνεχής $\left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right]$, αφού η $\ln(x^2 - 2x + 2)$ συνεχής ως σύνθεση των συνεχών $\ln x$ και $x^2 - 2x + 2$ οπότε η f συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών
- f παραγωγίσιμη $\left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right)$, αφού η $\ln(x^2 - 2x + 2)$ παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων $\ln x$ και $x^2 - 2x + 2$ οπότε η f παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων.

$$\text{Άρα } \exists \xi \in \left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\lambda + \frac{1}{2} - \lambda} = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$$

Όμως $f'(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα,

$$f'(\xi) \geq -1 \Leftrightarrow \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1 \Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2} \text{ άρα ισχύει η (3).}$$

Δ4.

Έστω $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, g(x_2))$ τα σημεία επαφής της C_f, C_g με την εφαπτομένη.

Τότε

$$f'(x_1) = g'(x_2) \quad (4) \text{ και } -x_1 f'(x_1) + f(x_1) = -x_2 g'(x_2) + g(x_2)$$

Όμως $f'(x_1) \geq -1$ με την ισότητα να ισχύει για $x = 1$ (από και $g'(x_2) = -3x_2^2 - 1$,

με $x_2^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3x_2^2 \leq 0 \Leftrightarrow -3x_2^2 - 1 \leq -1 \Leftrightarrow g'(x_2) \leq -1$ με την ισότητα να ισχύει για $x_2 = 0$

Άρα για να ισχύει η (4) πρέπει $x_1 = -1$ και $x_2 = 0$.

Άρα η κοινή εφαπτομένη είναι $\psi - g(0) = g'(0)(x - 0)$

$$\psi - 2 = -1(x - 0) \Leftrightarrow \psi = -x + 2$$

$$\text{και } y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Επιμέλεια απαντήσεων:

Δραγώνας Μπάμπης

Γκιούλος Θεόδωρος

Διονυσοπούλου Σοφία

Μαθηματικοί

Φροντιστήριο Μ.Ε «ΕΠΙΛΟΓΗ» - Καλαμάτα

<http://www.epil.gr>