

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

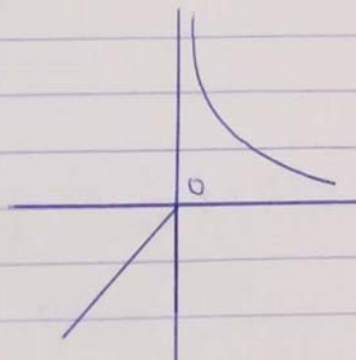
ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία βελ. 217

A2. α) Ψ

β) Παράδειγμα βολικό βελ. 153

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$



A3. Θεωρία βελ. 334

ΘΕΜΑ Β

B1. Η f παρλυν με $f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 + 8}{x^3}$

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$x^3 + 8$	-	0	+	+
x^3	-	-	-	+
f'	+	-	+	+
f	↗	↘	↗	↗

ΤΜ
 $f(-2) = -3$

(2)

B2 Η f' παρίσταται με $f''(x) = -\frac{24}{x^4} < 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	-		-
f			

B3 Κατακόρυφη $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{4}{x^2}\right) = 0 - 4 \cdot (+\infty) = -\infty$

Αρα η $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτα

Πλάγιες - Οριζόντιες

$$\text{Στο } -\infty : \alpha = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{4}{x^3}\right) = 1$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{4}{x^2} = 0$$

Αρα η $y=x$ πλάγια ασύμπτωτα στο $-\infty$

$$\text{Στο } +\infty : \alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{x^3}\right) = 1$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{4}{x^2} = 0$$

Αρα η $y=x$ πλάγια ασύμπτωτα στο $+\infty$

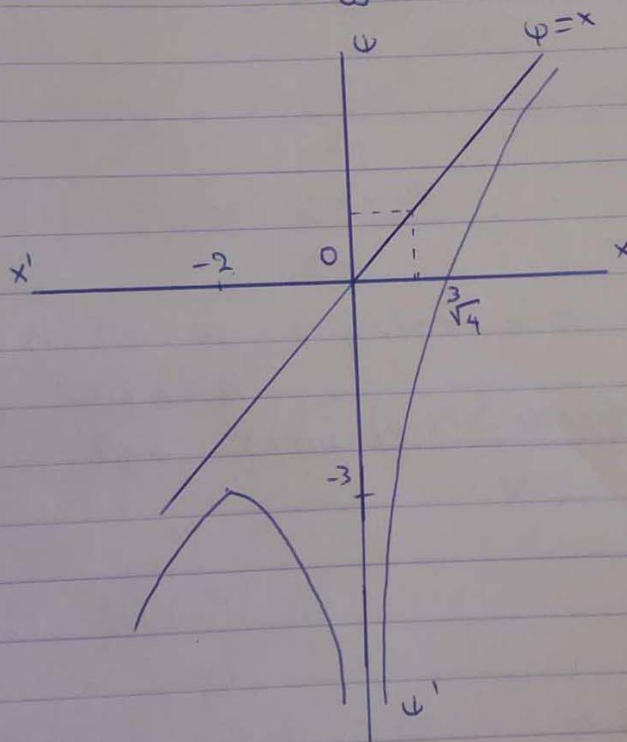
3

B4. Η f τέμνει τον x όταν $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3=4 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{4}$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
f''	-	-	-	-
f'	+	0	-	+
f		-3	-8	

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



(4)

ΘΕΜΑ Γ

γ1. Η πλευρά τετραγώνου είναι $\frac{x}{4}$ άρα $E_{\text{τετ}} = \frac{x^2}{16}$

Το μήκος κύκλου είναι $2\pi r$ οπότε $8-x = 2\pi r$
 άρα $r = \frac{8-x}{2\pi}$

$$\text{οπότε } E_{\text{κυκ}} = \pi r^2 = \pi \cdot \frac{(8-x)^2}{4\pi^2} = \pi \cdot \frac{64-16x+x^2}{4\pi^2} = \frac{64-16x+x^2}{4\pi}$$

$$\begin{aligned} \text{άρα } E &= \frac{x^2}{16} + \frac{64-16x+x^2}{4\pi} = \frac{\pi x^2 + 256 - 64x + 4x^2}{4\pi} \\ &= \frac{(4+\pi)x^2 - 64x + 256}{16\pi} \end{aligned}$$

και επειδή το x μήκος κ' το εύρος είναι θετ
 τότε $0 < x < 8$

$$\text{Άρα } E(x) = \frac{(4+\pi)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0, 8)$$

$$\text{γ2. } E'(x) = \frac{2(4+\pi)x - 64}{16\pi}$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(4+\pi)x - 64 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{32}{4+\pi}$$

x	0	$\frac{32}{4+\pi}$	8
$E'(x)$		- 0 +	
E		↗ ↘ ΟΕ	

Για $x_0 = \frac{32}{4+\pi}$ η πλευρά

$$\text{τετραγώνου είναι } \frac{x_0}{4} = \frac{8}{4+\pi}$$

(5)

$$\begin{aligned}\text{και η διάμετρος } \delta &= 2\rho = 2 \frac{(8-x_0)}{2n} = \frac{1}{n} \left(8 - \frac{32}{n+4} \right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{8n+32-32}{n+4} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{8n}{n+4} \\ &= \frac{8}{n+4}\end{aligned}$$

Αν η διάμετρος 1600ται με τη πλευρά τετραγώνου

$$\Gamma 3. \cdot E\left(0, \frac{32}{n+4}\right] \stackrel{E \downarrow}{6w} \left[E\left(\frac{32}{n+4}\right), \lim_{x \rightarrow 0^+} E(x) \right) = \left[\frac{16}{4+n}, \right.$$

$$\begin{aligned}\text{με } E\left(\frac{32}{n+4}\right) &= \frac{1}{16n} \left[(4+n) \frac{32^2}{(4+n)^2} - 64 \cdot \frac{32}{n+4} + 256 \right] \\ &= \frac{64}{n(4+n)} - \frac{128}{n(n+4)} + \frac{16}{n} \\ &= \frac{-64+16(n+4)}{n(n+4)} = \frac{16}{4+n}\end{aligned}$$

$$\cdot E\left[\frac{32}{n+4}, 8\right) \stackrel{E \uparrow}{6w} \left[E\left(\frac{32}{n+4}\right), \lim_{x \rightarrow 8^-} E(x) \right) = \left[\frac{16}{4+n}, 4 \right)$$

$$\text{Το } 5 \in E\left(0, \frac{32}{n+4}\right] \text{ και επειδή η } E \downarrow \text{ στο } \left(0, \frac{32}{n+4}\right)$$

έχει μοναδική λύση σ' αυτό

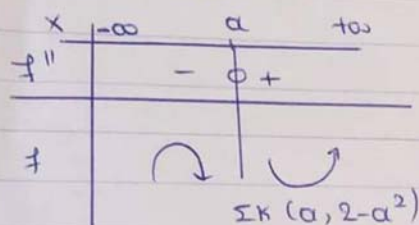
$$\text{Το } 5 \notin E\left[\frac{32}{n+4}, 8\right)$$

6

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = 2e^{x-a} - 2x$
 $f''(x) = 2e^{x-a} - 2$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-a} = 1 \Leftrightarrow x-a=0 \Leftrightarrow x=a$
 $f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x-a} > 1 \Leftrightarrow x-a > 0 \Leftrightarrow x > a$
 $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < a$



Δ2. Βρίσκω το $\Sigma \tau$ της f'

$f'(-\infty, a] \stackrel{f' \uparrow}{\underset{\text{GW}}{=}} [f'(a), \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)] = [2-2a, +\infty)$

$\mu \epsilon \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^{x-a} - 2x) = 0 - (-\infty) = +\infty$

$f'(a) = 2-2a$

$f'[a, +\infty) \stackrel{f' \uparrow}{\underset{\text{GW}}{=}} [f'(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)] = [2-2a, +\infty)$, $\mu \epsilon a > 1$
 ή $2-2a < 0$

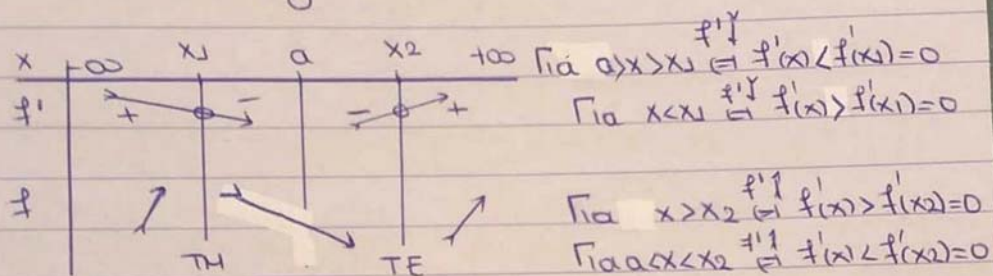
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \left(\frac{e^{x-a}}{x} - 1 \right) = (+\infty)(+\infty - 1) = +\infty$

$\mu \epsilon \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-a}}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-a}}{1} = +\infty$

7

Το $0 \in f'(-\infty, a]$ και επειδή η f' ↓ υπάρχει μοναδική
ρίζα $x_1 \in (-\infty, a)$

Το $0 \in f'[\alpha, +\infty)$ και επειδή f' ↑ υπάρχει μοναδική
ρίζα $x_2 \in (\alpha, +\infty)$



Αρα η f έχει ΤΗ στο x_1
και ΤΕ στο x_2 .

Δ3 Προσδιορίσω τη θέση του 1.

Το $f'(1) = 2(e^{1-a} - 1) < 0$ αφού για $a > 1$ $\Leftrightarrow 1-a < 0 \Leftrightarrow$
 $e^{1-a} < 1 \Leftrightarrow e^{1-a} - 1 < 0$

Αρα το $1 \in (x_1, a)$ οπότε αφού f' ↓ στο (x_1, x_2)
είναι $x_1 < 1 < a < x_2$
 $\Leftrightarrow f(x_1) > f(1) > f(x_2)$

Αρα $f(1) \notin f([a, x_2]) = (f(x_2), f(a))$

(8)

Δ4. Για $a=2$: $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$ οπότε $f(2) = -2$ κ' $f'(2) = 2 - 4 = -2$

Η εξίσωση εφαπτομένης στο $(2, f(2))$ είναι

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

$$y + 2 = -2(x - 2)$$

$$y = -2x + 2$$

Στο $[2, +\infty)$ η $f \geq$ οπότε

$$\sqrt{x-2} \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq -2x + 2 \quad \text{με το } = \text{ για } x=2$$

$$\text{οπότε} \quad \int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} \, dx > \int_2^3 (-2x+2) \sqrt{x-2} \, dx \quad (1)$$

$$\text{με} \quad \int_2^3 (-2x+2) \sqrt{x-2} \, dx \quad \begin{array}{l} \sqrt{x-2}=y \\ x-2=y^2 \\ dx=2y \, dy \end{array} \quad \int_0^1 (-2y^2-2) \cdot y \cdot 2y \, dy$$

$$\text{Για } x=2: y=0$$

$$\text{Για } x=3: y=1$$

$$= \int_0^1 (-4y^4 - 4y^2) \, dy = \left[-\frac{4y^5}{5} - \frac{4y^3}{3} \right]_0^1$$

$$= -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{32}{15}$$

$$\text{'Αρα} \quad \int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} \, dx > -\frac{32}{15}$$

Επιμέλεια απαντήσεων

Δραγώνας Μπάμπης

Γκιούλος Θεόδωρος

Διονυσοπούλου Σοφία

Μαθηματικοί

Φροντιστήριο Μ.Ε «ΕΠΙΛΟΓΗ»