

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

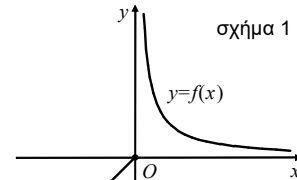
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 99

A2. α. Ψ

β. Αντιπαράδειγμα στο διπλανό σχήμα



A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 74

A4. α. Λάθος, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Σωστό, **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

B1. Για να είναι συνεχής η f στο $x_0 = 3$ πρέπει $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (2\alpha x + 6) = 6\alpha + 6 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} [-x^2 + (3 - \alpha)x + 3\alpha] = 0 \\ f(3) &= 2\alpha \cdot 3 + 6 = 6\alpha + 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 6\alpha + 6 = 0 \quad \boxed{\alpha = -1}$$

B2. Για $\alpha = -1$ είναι $f(x) = \begin{cases} -2x + 6, & x \leq 3 \\ -x^2 + 4x - 3, & x > 3 \end{cases}$

▷ $x < 3$: $f'(x) = (-2x + 6)' = -2$

▷ $x > 3$: $f'(x) = (-x^2 + 4x - 3)' = -2x + 4$

$$\left. \begin{aligned} \text{▷ } x_0 = 3 : \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2x + 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2(x - 3)}{x - 3} = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x^2 + 4x - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-(x - 1)(x - 3)}{x - 3} = -2 \end{aligned} \right\} f'(3) = -2$$

Επομένως $f'(x) = \begin{cases} -2, & x < 3 \\ -2x + 4, & x \geq 3 \end{cases}$

B3. Για $x \geq 3$ είναι $f'(x) = -2x + 4$.

$x \geq 3 \Leftrightarrow -2x \leq -6 \Leftrightarrow -2x + 4 \leq -6 + 4 \Leftrightarrow f'(x) \leq -2 < 0$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[3, +\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = \left(x - \frac{4}{x^2}\right)' = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 + 8}{x^3}, x \neq 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$x^3 + 8$	-	○	+	+
x^3	-	○	+	+
$f'(x)$	+	○	-	+
f				

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -2]$ και $(0, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 0)$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = -2$, την τιμή

$$f(-2) = -2 - \frac{4}{(-2)^2} = -2 - 1 = -3.$$

Γ2. • $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{4}{x^2}\right) = -\infty$, διότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{x^2} = +\infty$

άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$ (y')

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^2} = 0$, διότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = x$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2} = 0$, διότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = x$

Γ3. $f(2) = 1$ και $f'(2) = 2$, άρα

$$(\varepsilon) : y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Leftrightarrow (\varepsilon) : y - 1 = 2 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon) : y - 1 = 2x - 4 \Leftrightarrow (\varepsilon) : y = 2x - 3$$

$$\begin{aligned} \Gamma 4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{f(x)-1} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x - \frac{4}{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\frac{x^3 - 4 - x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(x-2)}{x^3 - x^2 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x^3 - x^2 - 4} \stackrel{\text{DL'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 4x}{3x^2 - 2x} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αν x είναι το μήκος του σύρματος για να σχηματιστεί το τετράγωνο,

τότε η πλευρά του τετραγώνου είναι $\frac{x}{4}$ m.

$$E_{\text{τετραγώνου}} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16} \text{ m}^2, 0 < x < 8$$

Το μήκος του σύρματος που χρησιμοποιήθηκε για τον σχηματισμό του κύκλου έχει μήκος $(8 - x)$ m.

$$\text{μήκος κύκλου } L = 2\pi\rho \Leftrightarrow 8 - x = 2\pi\rho \Leftrightarrow \rho = \frac{8 - x}{2\pi} \text{ m}$$

$$E_{\text{κύκλου}} = \pi\rho^2 = \pi\left(\frac{8 - x}{2\pi}\right)^2 = \pi \frac{(8 - x)^2}{4\pi^2} = \frac{x^2 - 16x + 64}{4\pi} \text{ m}^2$$

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{x^2}{16} + \frac{x^2 - 16x + 64}{4\pi} = \frac{\pi x^2}{16\pi} + \frac{4x^2 - 64x + 256}{16\pi} \\ &= \frac{\pi x^2 + 4x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, x \in (0, 8) \end{aligned}$$

$$\Delta 2. E'(x) = \left[\frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} \right]' = \frac{2(\pi + 4)x - 64}{16\pi} = \frac{(\pi + 4)x - 32}{8\pi}$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(\pi + 4)x - 32}{8\pi} = 0 \Leftrightarrow (\pi + 4)x - 32 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{32}{\pi + 4}$$

x	$\frac{32}{\pi + 4}$	8
$E'(x)$	-	+
$E(x)$		

Το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο όταν $x = \frac{32}{\pi + 4}$ m.

Όταν $x = \frac{32}{\pi + 4}$, τότε : πλευρά τετραγώνου $= \frac{x}{4} = \frac{\frac{32}{\pi + 4}}{4} = \frac{8}{\pi + 4} \text{ m}$

$$\begin{aligned} \text{διάμετρος κύκλου} &= 2\rho = 2 \cdot \frac{8 - x}{2} = \frac{8 - \frac{32}{\pi + 4}}{\pi} = \frac{8\pi + 32 - 32}{\pi} \\ &= \frac{8\pi}{\pi} = \frac{8\pi}{\pi \cdot (\pi + 4)} = \frac{8}{\pi + 4} \text{ m} \end{aligned}$$

Επομένως όταν το E γίνεται ελάχιστο, τότε η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με τη διάμετρο του κύκλου.

Δ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει ακριβώς μία ρίζα

- $\Delta_1 = \left(0, \frac{32}{\pi + 4}\right)$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} E(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{256}{16\pi} = \frac{16}{\pi} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{32}{\pi + 4}} E(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{32}{\pi + 4}} \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{16}{\pi + 4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow E(\Delta_1) = \left(\frac{16}{\pi + 4}, \frac{16}{\pi}\right)$$

Είναι $5 \in \left(\frac{16}{\pi + 4}, \frac{16}{\pi}\right)$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \Delta_1$ ώστε $E(x_0) = 5 \text{ m}^2$

- $\Delta_2 = \left(\frac{32}{\pi + 4}, 8\right)$

$$\left. \begin{aligned} E\left(\frac{32}{\pi + 4}\right) &= \frac{16}{\pi + 4} \\ \lim_{x \rightarrow 8^-} E(x) &= \lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{64\pi}{16\pi} = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow E(\Delta_2) = \left[\frac{16}{\pi + 4}, 4\right)$$

Είναι $5 \notin \left[\frac{16}{\pi + 4}, 4\right)$, άρα η εξίσωση $E(x) = 5$ είναι αδύνατη στο Δ_2

Επομένως η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει ακριβώς μια ρίζα.