

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 145

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 15

A3. Η T είναι η παράγωγος της f και η H είναι η παράγωγος της g .

A4. α. Ψ

β. Αν $f(x) = \frac{1}{x^2}$ και $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$,

τότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 1$.

A5. α. Σωστό, β. Σωστό, γ. Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

B1. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 1]$ ως πολυωνυμική και στο $(1, +\infty)$ ως ρητή. Για να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$, δηλαδή θα πρέπει $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$.

$$\left. \begin{aligned} &\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + \alpha) = \alpha + 1 \\ &\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x} = 2 \\ &\bullet f(1) = 1^2 + \alpha = \alpha + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha + 1 = 2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

$$\text{Για } \alpha = 1 \text{ είναι } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1 \\ \frac{x+1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

B2. Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x+1}{x} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{-x+1}{x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-1)}{x \cdot (x-1)} = -1$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1},$$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, δηλαδή

δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

B3. Αναζητούμε x_0 τέτοιο ώστε $f'(x_0) = -\frac{1}{4}$.

▷ Για $x < 1$ έχουμε : $f'(x) = (x^2 + 1)' = 2x$

$$f'(x_0) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2x_0 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{8} \left(\text{δεκτή αφού } -\frac{1}{8} < 1 \right)$$

$$f\left(-\frac{1}{8}\right) = \left(-\frac{1}{8}\right)^2 + 1 = \frac{1}{64} + 1 = \frac{65}{64} \rightarrow \boxed{A\left(-\frac{1}{8}, \frac{65}{64}\right)}$$

$$(\varepsilon_1) : y - f\left(-\frac{1}{8}\right) = f'\left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow y - \frac{65}{64} = -\frac{1}{4} \cdot \left(x + \frac{1}{8}\right)$$

$$\Leftrightarrow y - \frac{65}{64} = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{32} \Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{1}{4}x + \frac{63}{64}}$$

▷ Για $x > 1$ έχουμε : $f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$$f'(x_0) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_0^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \stackrel{x_0 > 1}{\Leftrightarrow} x_0 = 2$$

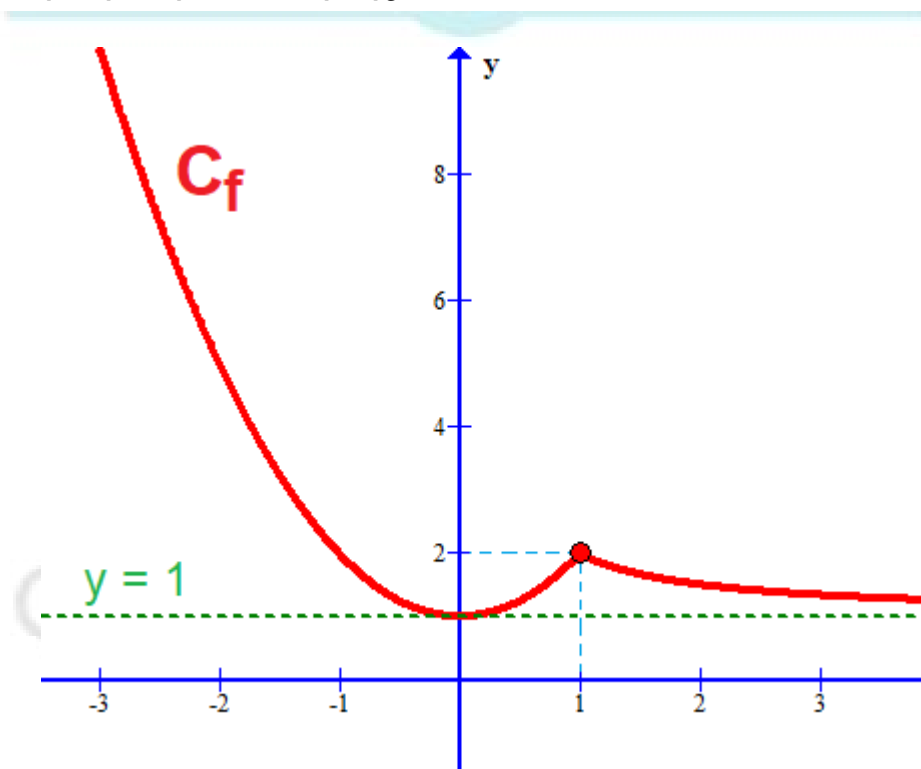
$$f(2) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{B\left(2, \frac{3}{2}\right)}$$

$$(\varepsilon_2) : y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4} \cdot (x - 2) \Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{1}{4}x + 2}$$

B4. $D_f = \mathbb{R}$

- Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,
άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες
- Στο $(-\infty, 1]$ η f είναι πολυωνυμική δευτέρου βαθμού,
άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$,
άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$
την ευθεία $y = 1$.

Γραφική παράσταση της f



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = (2\eta\mu x - x)' = 2\sigma\upsilon\nu x - 1, x \in [0, \pi]$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}$$

και επειδή $x \in [0, \pi]$ θα είναι $x = \frac{\pi}{3}$.

$f'(0) = 2\sigma\upsilon\nu 0 - 1 = 1 > 0$	x	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$f'(\pi) = 2\sigma\upsilon\nu \pi - 1 = -1 < 0$
	$f'(x)$		-	+	
	$f(x)$				
		Τ.ελ.	Τ.μ.	Τ.ελ.	

$$f(0) = 2\eta\mu 0 - 0 = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\eta\mu \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

$$f(\pi) = 2\eta\mu \pi - \pi = -\pi$$

▷ Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 0$ την τιμή $f(0) = 0$,

▷ Η f παρουσιάζει τοπικό και ολικό ελάχιστο για $x = \frac{\pi}{3}$

$$\text{την τιμή } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

▷ Η f παρουσιάζει τοπικό και ολικό ελάχιστο για $x = \pi$ την τιμή $f(\pi) = -\pi$.

Γ2. $f''(x) = (2\sigma\upsilon\nu x - 1)' = -2\eta\mu x \leq 0$, για κάθε $x \in [0, \pi]$

και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$ ή $x = \pi$.

Επομένως η f είναι κοίλη στο $[0, \pi]$ και οποιαδήποτε εφαπτομένη της στο τυχαίο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται πάνω από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής A , δηλαδή έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τη C_f .

$$\begin{aligned}
 \Gamma 3. \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx &= \int_0^{\pi} (2\eta\mu x - x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx \\
 &= \int_0^{\pi} (2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x) \, dx \\
 &= \int_0^{\pi} 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx - \int_0^{\pi} x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx \\
 &= \int_0^{\pi} \eta\mu 2x \, dx - \int_0^{\pi} x \cdot (\eta\mu x)' \, dx \\
 &= \left[\cancel{\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}} \right]_0^{\pi} - \left[\cancel{x \cdot \eta\mu x} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (x)' \cdot \eta\mu x \, dx \\
 &= \int_0^{\pi} \eta\mu x \, dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} \\
 &= -\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0 \\
 &= \boxed{2}
 \end{aligned}$$

Εναλλακτικά για το $\int_0^{\pi} 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx$ μπορούμε να κάνουμε

$$\begin{aligned}
 \triangleright \int_0^{\pi} 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx &= \int_0^{\pi} 2\eta\mu x \cdot (\eta\mu x)' \, dx = \int_0^{\pi} (\eta\mu^2 x)' \, dx \\
 &= [\eta\mu^2 x]_0^{\pi} = \eta\mu^2\pi - \eta\mu^2 0 = 0 - 0 = 0
 \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned}
 \triangleright \int_0^{\pi} 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx &= \int_0^{\pi} -2\sigma\upsilon\nu x \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' \, dx = \int_0^{\pi} (-\sigma\upsilon\nu^2 x)' \, dx \\
 &= [-\sigma\upsilon\nu^2 x]_0^{\pi} = -\sigma\upsilon\nu^2\pi + \sigma\upsilon\nu^2 0 = -1 + 1 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma 4. \alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta\mu x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \frac{\eta\mu x}{x} - 1 \right) = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} - 1 \\
 &= 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = \boxed{1}
 \end{aligned}$$

β) 1^η λύση

$$\lim_{x \rightarrow 0} [(f(x) - f(2x)) \cdot \ln x] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{f(x)}{x} - \frac{f(2x)}{x} \right) \cdot x \ln x \right] = \boxed{0}$$

διότι $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{f(2x)}{x} \right) = 1 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$

αφού $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ από Γ4.α) και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{2x} \stackrel{\text{Θέτω } 2x = u}{=} \underset{\text{όταν } x \rightarrow 0, \text{ τότε } u \rightarrow 0}{=} 2 \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = 2 \cdot 1 = 2$$

και $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \underset{\text{DL'H}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$

2^η λύση

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} [(f(x) - f(2x)) \cdot \ln x] &= \lim_{x \rightarrow 0} [(2\eta\mu x - x - 2\eta\mu 2x + 2x) \cdot \ln x] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} [(2\eta\mu x - 2\eta\mu 2x + x) \cdot \ln x] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(2\frac{\eta\mu x}{x} - 2\frac{\eta\mu 2x}{x} + 1 \right) \cdot x \ln x \right] = \boxed{0} \end{aligned}$$

διότι $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2\frac{\eta\mu x}{x} - 2\frac{\eta\mu 2x}{x} + 1 \right) = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} - 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x} + 1$
 $= 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 = 2 - 4 + 1 = -1$

και $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \underset{\text{DL'H}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. 1^η λύση

Θεωρώ τη συνάρτηση g , με $g(x) = (x+1) \cdot \ln(x+1) - x$, $x \geq 0$

$$\begin{aligned} g'(x) &= [(x+1) \cdot \ln(x+1) - x]' \\ &= (x+1)' \cdot \ln(x+1) + (x+1) \cdot [\ln(x+1)]' - (x)' \\ &= 1 \cdot \ln(x+1) + \cancel{(x+1)} \cdot \frac{1}{\cancel{x+1}} - 1 = \ln(x+1) + \cancel{1} - \cancel{1} = \ln(x+1) \end{aligned}$$

Για $x > 0$ είναι $x+1 > 1 \Leftrightarrow \ln(x+1) > \ln 1 \Leftrightarrow g'(x) > 0$

και επειδή η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$,

η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Είναι $x > 0 \stackrel{g \uparrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow (x+1) \cdot \ln(x+1) - x > 0 \Leftrightarrow$

$$(x+1) \cdot \ln(x+1) > x \stackrel{x+1 > 0}{\Leftrightarrow} \boxed{\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}}$$

2^η λύση

Θεωρώ τη συνάρτηση h , με $h(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$, $x \geq 1$

$$h'(x) = \left[\ln x + \frac{1}{x} - 1 \right]' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}, x \geq 1$$

Για $x > 1$ είναι $h'(x) > 0$,

και επειδή η h είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ ως άθροισμα συνεχών η h θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Αν $x > 0$, τότε $x+1 > 1 \stackrel{h \uparrow \text{ στο } [1, +\infty)}{\Rightarrow} h(x+1) > h(1) \Leftrightarrow$

$$\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) > 1 - \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\ln(x+1) > \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \boxed{\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}}$$

3^η Λύση

Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου ισχύει :

$\ln x \leq x - 1$ (1), για κάθε $x > 0$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 1$.

Για $x > 0$ είναι $0 < \frac{1}{x+1} < 1$, άρα

αντικαθιστώντας στη σχέση (1) όπου x το $\frac{1}{x+1}$ έχουμε:

$$\ln \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x+1} - 1 \Leftrightarrow -\ln(x+1) < \frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$-\ln(x+1) < -\frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \boxed{\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}}$$

$$\begin{aligned} \Delta 2. f'(x) &= \left[\frac{\ln(x+1)}{x} \right]' = \frac{[\ln(x+1)]' \cdot x - \ln(x+1) \cdot (x)'}{x^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x+1} \cdot x - \ln(x+1) \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} \end{aligned}$$

Είναι $f'(x) < 0$, για κάθε $x > 0$, διότι $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1)$ από Δ1.

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

δηλαδή είναι 1-1, άρα **αντιστρέφεται**.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DL'H}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\text{DL'H}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

άρα $f(A) = D_{f^{-1}} = (0, 1)$

$$\Delta 3. f(x) < 1 \xLeftrightarrow{f \downarrow} f(f(x)) > f(1) \Leftrightarrow \frac{\ln(f(x) + 1)}{f(x)} > \ln 2 \xLeftrightarrow{f(x) > 0}$$

$$\ln(f(x) + 1) > f(x) \cdot \ln 2 \Leftrightarrow \ln(f(x) + 1) > \ln 2^{f(x)} \xLeftrightarrow{\ln x \uparrow}$$

$$f(x) + 1 > 2^{f(x)} \Leftrightarrow f(x) > 2^{f(x)} - 1, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση h , με

$$h(x) = x \cdot (x - 2) \cdot f(\alpha) + x \cdot (x - 1) \cdot f^{-1}(\alpha) + (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot \eta\mu(\pi\alpha), x \in \mathbb{R}.$$

• Η h είναι συνεχής στα $[0, 1]$ και $[1, 2]$ ως πολυωνυμική

• $h(0) = 2 \cdot \eta\mu(\pi\alpha) > 0$, διότι $0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow 0 < \pi\alpha < \pi$ και $\eta\mu(\pi\alpha) > 0$

$h(1) = -f(\alpha) < 0$, διότι $f(\alpha) > 0$ από Δ2

$h(2) = 2f^{-1}(\alpha) > 0$, διότι $D_f = (0, +\infty)$ είναι το σύνολο τιμών της f^{-1}

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Bolzano για τη συνάρτηση h

στα διαστήματα $[0, 1]$ και $[1, 2]$,

δηλαδή η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο

διάστημα $(0, 1)$ και μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Η h είναι πολυωνυμική $2^{\text{ου}}$ βαθμού άρα έχει δύο το πολύ ρίζες.

Επομένως η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες,

μία στο διάστημα $(0, 1)$ και μία στο διάστημα $(1, 2)$.

Επειδή τα $0, 1$ και 2 δεν είναι ρίζες της εξίσωσης $h(x) = 0$,

$$\text{οι εξισώσεις } \frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2} + \frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x} = 0 \text{ και } h(x) = 0$$

είναι ισοδύναμες στο $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$,

$$\text{δηλαδή η εξίσωση } \frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2} + \frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x} = 0$$

έχει δύο ακριβώς ρίζες, μία στο $(0, 1)$ και μία στο $(1, 2)$.

Δ5. Θα δείξουμε αρχικά $F(1) > \ln 2$

1^η λύση

Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $[1, e]$, με $F'(x) = f(x)$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την F στο διάστημα $[1, e]$

άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, e)$, τέτοιο ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(e) - F(1)}{e - 1} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{e \cdot \ln 2 - F(1)}{e - 1}$$

$$1 < \xi \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(1) > f(\xi) \Leftrightarrow$$

$$\ln 2 > \frac{e \cdot \ln 2 - F(1)}{e - 1} \stackrel{e-1 > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\cancel{e \cdot \ln 2} - \ln 2 > \cancel{e \cdot \ln 2} - F(1) \Leftrightarrow$$

$$- \ln 2 > - F(1) \Leftrightarrow$$

$$F(1) > \ln 2 \quad (1)$$

2^η λύση

$$1 \leq x \leq e \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(1) \geq f(x) \geq f(e) \Leftrightarrow \ln 2 \geq f(x) \geq \frac{\ln(e+1)}{e}$$

Είναι $f(x) \leq \ln 2$, για κάθε $x \in [1, e]$

και το "=" ισχύει μόνο για $x = 1$, άρα

$$\int_1^e f(x) dx < \int_1^e \ln 2 dx \Leftrightarrow$$

$$[F(x)]_1^e < \ln 2 \cdot \int_1^e 1 dx \Leftrightarrow$$

$$F(e) - F(1) < \ln 2 \cdot [x]_1^e \Leftrightarrow$$

$$e \cdot \ln 2 - F(1) < \ln 2 \cdot (e - 1) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{e \cdot \ln 2} - F(1) > \cancel{e \cdot \ln 2} - \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$F(1) > \ln 2 \quad (1)$$

Έπειτα θα δείξουμε ότι $F(1) < \ln \frac{2^{e+1}}{e+1}$

1^η λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση φ , με $\varphi(x) = F(x) - x f(x)$, $x > 0$

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= [F(x) - x \cdot f(x)]' = F'(x) - [x \cdot f(x)]' = f(x) - [f(x) + x \cdot f'(x)] \\ &= \cancel{f(x)} - \cancel{f(x)} - x \cdot f'(x) = -x \cdot f'(x), x > 0\end{aligned}$$

Είναι $\varphi'(x) > 0$, για κάθε $x > 0$, διότι $f'(x) < 0$ στο $(0, +\infty)$
άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

$$1 < e \stackrel{\varphi \uparrow}{\Leftrightarrow} \varphi(1) < \varphi(e) \Leftrightarrow F(1) - f(1) < F(e) - e \cdot f(e) \Leftrightarrow$$

$$F(1) - \ln 2 < e \ln 2 - \cancel{e} \cdot \frac{\ln(e+1)}{\cancel{e}} \Leftrightarrow F(1) - \ln 2 < e \ln 2 - \ln(e+1) \Leftrightarrow$$

$$F(1) < e \ln 2 + \ln 2 - \ln(e+1) \Leftrightarrow F(1) < (e+1) \cdot \ln 2 - \ln(e+1) \Leftrightarrow$$

$$F(1) < \ln 2^{e+1} - \ln(e+1) \Leftrightarrow F(1) < \ln \frac{2^{e+1}}{e+1} \quad (2)$$

2^η λύση: Από το Θ.Μ.Τ. με την F στο $[1, e]$:

$$\text{υπάρχει } \xi \in (1, e) \text{ ώστε } f(\xi) = \frac{e \cdot \ln 2 - F(1)}{e - 1}$$

$$\xi < e \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(\xi) > f(e) \Leftrightarrow \frac{e \cdot \ln 2 - F(1)}{e - 1} > \frac{\ln(e+1)}{e} \Leftrightarrow$$

$$F(1) < e \ln 2 - \frac{(e-1) \cdot \ln(e+1)}{e}$$

$$\text{Αρκεί να δείξουμε ότι } e \ln 2 - \frac{(e-1) \cdot \ln(e+1)}{e} < \ln \frac{2^{e+1}}{e+1} \Leftrightarrow$$

$$e \ln 2 - \frac{e \cdot \ln(e+1) - \ln(e+1)}{e} < (e+1) \cdot \ln 2 - \ln(e+1) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{e \ln 2} - \cancel{\ln(e+1)} + \frac{1}{e} \cdot \ln(e+1) < \cancel{e \ln 2} + \ln 2 - \cancel{\ln(e+1)} \Leftrightarrow$$

$$\ln(e+1) < e \ln 2 \Leftrightarrow \ln(e+1) < \ln 2^e \stackrel{\ln x \uparrow}{\Leftrightarrow} e+1 < 2^e \text{ που ισχύει}$$

$$\text{διότι } e+1 < 4 = 2^2 < 2^e. \text{ Επομένως } F(1) < \ln \frac{2^{e+1}}{e+1} \quad (2)$$

3^η λύση:

Είναι $f(x) \geq \frac{\ln(e+1)}{e}$, για κάθε $x \in [1, e]$

και το "=" ισχύει μόνο για $x = e$, άρα

$$\int_1^e f(x) dx > \int_1^e \frac{\ln(e+1)}{e} dx \Leftrightarrow$$

$$[F(x)]_1^e > \frac{\ln(e+1)}{e} \cdot \int_1^e 1 dx \Leftrightarrow$$

$$F(e) - F(1) > \frac{\ln(e+1)}{e} \cdot [x]_1^e \Leftrightarrow$$

$$e \ln 2 - F(1) > \frac{\ln(e+1)}{e} \cdot (e-1) \Leftrightarrow$$

$$F(1) < e \ln 2 - \frac{(e-1) \cdot \ln(e+1)}{e}$$

$$\text{Αρκεί να δείξουμε ότι } e \ln 2 - \frac{(e-1) \cdot \ln(e+1)}{e} < \ln \frac{2^{e+1}}{e+1} \Leftrightarrow$$

$$e \ln 2 - \frac{e \cdot \ln(e+1) - \ln(e+1)}{e} < (e+1) \cdot \ln 2 - \ln(e+1) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{e \ln 2} - \cancel{\ln(e+1)} + \frac{1}{e} \cdot \ln(e+1) < \cancel{e \ln 2} + \ln 2 - \cancel{\ln(e+1)} \Leftrightarrow$$

$$\ln(e+1) < e \ln 2 \Leftrightarrow \ln(e+1) < \ln 2^e \xrightarrow{\ln x \uparrow} e+1 < 2^e \text{ που ισχύει}$$

$$\text{διότι } e+1 < 4 = 2^2 < 2^e. \text{ Επομένως } \mathbf{F(1) < \ln \frac{2^{e+1}}{e+1} \quad (2)}$$

Από (1) και (2) έχουμε

$$\ln 2 < F(1) < \ln \frac{2^{e+1}}{e+1}$$