

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικό σελ. 253

A2. α. Ψ.

β. $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0. \\ -x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ Η f είναι συνεχής στο 0 αλλά δεν είναι

παραγωγίσιμη στο 0 αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

A3. Θεωρία σχολικό σελ. 191

A4. α. → Λάθος

β. → Σωστό

γ. → Λάθος

δ. → Σωστό

ε. → Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. $D_{fog} = \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{x}{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x(1-x) > 0 \Leftrightarrow x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x - x^2$	-	0	+	0

και $(fog)(x) = f(g(x)) = \ln \frac{x}{1-x}$.

B2. Είναι
$$h'(x) = \frac{1}{\frac{x}{1-x}} \cdot \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{x(1-x)} > 0$$

άρα $h \uparrow$ στο $(0,1)$ οπότε και 1-1 άρα υπάρχει η αντίστροφη h^{-1} .

$$h(x) = y \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow x = e^y - xe^y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(1+e^y) = e^y \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{1+e^y}.$$

άρα $f^{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ με $D_{h^{-1}} = h(0,1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \right) = (-\infty, +\infty)$

Με $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty.$

Θέτω $y = \frac{x}{1-x}$ με $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1-x} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = \lim_{w \rightarrow +\infty} \ln w = +\infty.$

Θέτω $w = \frac{x}{1-x}$ με $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1-x} = +\infty.$

B3. Είναι
$$\varphi'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^{2x}}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$
 άρα φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

οπότε δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \varphi''(x) &= \frac{e^x(e^x+1)^2 - e^x \cdot 2(e^x+1) \cdot e^x}{(e^x+1)^4} = \frac{e^x(e^x+1)(e^x+1-2e^x)}{(e^x+1)^4} = \\ &= \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}. \end{aligned}$$

$$\varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\varphi''(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi''(x)$	+	0	-
$\varphi(x)$			

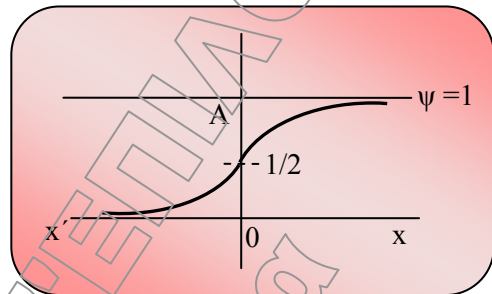
Η φ  στο $(-\infty, 0]$ και  στο $[0, +\infty)$. Παρουσιάζει Σ.Κ. στο 0 το $\varphi(0) = \frac{1}{2}$

B4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{DLH} \frac{e^x}{e^x} = 1$ άρα η $\psi = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 0$ άρα η $\psi = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Ο πίνακας μεταβολών είναι

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi''(x)$	+	0	-
$\varphi'(x)$	+		+
$\varphi(x)$	0	$\frac{1}{2}$	1



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της C_f με την εφαπτομένη.

Τότε $\psi - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Επειδή διέρχονται από το $A(\pi/2, -\pi/2)$ είναι $-\frac{\pi}{2} - f(x_0) = f'(x_0)\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)$ με

$$f'(x) = -\sin x \text{ άρα γίνεται } -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sin x_0 \left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)$$

$$\text{Θεωρώ } h(x) = -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x + \frac{\pi}{2} \sin x - x \sin x \quad x \in [0, \pi]$$

Παρατηρώ ότι $h(0) = 0$ και $h(\pi) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \pi = 0$ και επειδή

$$h'(x) = \sin x - \frac{\pi}{2} \eta\mu x - \sin x + x \eta\mu x = \eta\mu x \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \text{ όπου } \eta\mu x \geq 0 \text{ για κάθε}$$

$x \in [0, \pi]$ και

x	0	$\pi/2$	π
$x - \pi/2$	-	0	+
$h'(x)$	-	+	
$h(x)$	0		0

OE

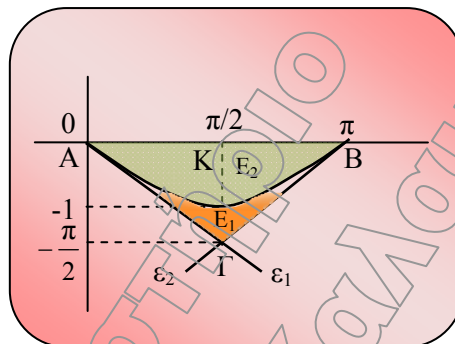
Παρουσιάζει Ο.Ε. στο $\frac{\pi}{2}$ το $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} + 1 < 0$.

Άρα $h\left[0, \frac{\pi}{2}\right] = \left[-\frac{\pi}{2} + 1, 0\right]$ και $h\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] = \left[-\frac{\pi}{2} + 1, 0\right]$.

Άρα $-\frac{\pi}{2} + 1 \leq h(x) \leq 0$ με $h(x) = 0$ μόνο για $x = 0$ και $x = \pi$.

Άρα η εφαπτομένη στο $(0, f(0))$ είναι η $\varepsilon_1: \psi = -x$ και η εφαπτομένη στο $(\pi, f(\pi))$ είναι η $\varepsilon_2: \psi = x - \pi$ και

Γ2. Οι $\varepsilon_1: \psi = -x$ και η $\varepsilon_2: \psi = x - \pi$ τέμνονται στο $\Gamma\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ και είναι



Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB) \cdot (\Gamma K) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$.

$E_2 = \int_0^{\pi} (-f(x)) dx = \int_0^{\pi} \eta \mu x dx = [-\sigma \nu x]_0^{\pi} = -\sigma \nu \pi + \sigma \nu 0 = 1 + 1 = 2$.

Άρα $E_1 = (AB\Gamma) - E_2 = \frac{\pi^2}{4} - 2$ οπότε $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$

Γ3. Επειδή $f'(x) = -\sigma \nu x$ και $f''(x) = \eta \mu x \geq 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$ η f είναι κυρτή οπότε $f(x) \geq x - \pi$ με το $=$ να ισχύει για $x = \pi$ (ή από το σχήμα).

Άρα $f(x) - x + \pi \geq 0$. Οπότε $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi} = +\infty$

Γ4. Είναι $f(x) \geq x - \pi$ οπότε για $x \in [1, e]$

$$\frac{f(x)}{x} \geq 1 - \frac{\pi}{x} \quad \text{με το } = \text{ να ισχύει για } x = \pi$$

$$\text{οπότε } \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > \int_1^e \left(1 - \frac{\pi}{x}\right) dx \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > [x - \pi \ln|x|]_1^e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - \pi \ln e - 1 \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - \pi - 1.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στα $[-1, 0)$ και $(0, \pi]$ η f συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{x^4} = 0 \\ \text{Στο } x_0 = 0: \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \eta \mu x = 0 \\ f(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ Άρα } f \text{ είναι συνεχής στο } 0.$$

Είναι για $x \in [-1, 0)$: $f(x) = \sqrt[3]{x^4} = |x|^{4/3} = (-x)^{4/3}$ οπότε

$$f'(x) = \frac{4}{3}(-x)^{1/3} \cdot (-1) = -\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}$$

και για $x \in (0, \pi]$ $f'(x) = e^x (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x)$.

$$\text{Άρα } f'(x) = \begin{cases} -\frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{-x} & \text{αν } -1 \leq x < 0 \\ e^x (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x) & \text{αν } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Παρατηρώ ότι στο $[-1, 0]$ $f'(x) < 0$ οπότε $f \downarrow$

Και στο $(0, \pi]$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x = 0 \Leftrightarrow \eta \mu x = -\sigma \upsilon \nu x \Leftrightarrow \epsilon \rho x = -1 \Leftrightarrow x = 3\pi/4$$

x	0	3π/4	π
x ₀	0	0	π
f'(x ₀)	1	0	-e ^π
f''(x)	+	0	-

Άρα το $\frac{3\pi}{4}$ είναι κρίσιμο σημείο.

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\%}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{4}{3} \sqrt[3]{-x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \eta \mu x}{x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Άρα δεν υπάρχει $f'(0)$ οπότε και το 0 είναι κρίσιμο σημείο.

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι 0 και $\frac{3\pi}{4}$.

Λ2. Από το Δ1

x	-1	0	$\frac{3\pi}{4}$	π
$-\frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{-x}$	-			
$e^x(\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x)$			+	-
$f'(x)$	-	+	0	-
$f(x)$				
	TM	TE	TM	TE

Η f παρουσιάζει T.M. στο -1 το $f(-1)=1$, T.E. στο 0 το $f(0)=0$, T.M. στο $\frac{3\pi}{4}$ το

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{e^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2}}{2}, \text{ T.E. στο } \pi \text{ το } f(\pi) = 0. \text{ Άρα τα σύνολα τιμών είναι:}$$

$$f[-1, 0] = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), f(-1) \right] = (0, 1]$$

$$f\left[0, \frac{3\pi}{4}\right] = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} f(x) \right] = \left[0, \frac{e^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2}}{2} \right)$$

$$f\left[\frac{3\pi}{4}, 0\right] = \left[f(\pi), f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right] = \left[0, \frac{e^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2}}{2} \right]$$

$$\text{Οπότε } f[-1, \pi] = \left[0, \frac{e^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2}}{2} \right] \text{ οπότε στα } 0 \text{ και } \pi \text{ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και στο } \frac{3\pi}{4}$$

ολικό μέγιστο.

Δ3. $E(\Omega) = \int_0^{\pi} |f(x) - g(x)| dx$ (1)

Λύνω στο $[0, \pi]$ την $f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow e^x \eta \mu x - e^{5x} > 0 \Leftrightarrow \eta \mu x - e^{4x} > 0 \Leftrightarrow \eta \mu x > e^{4x}$

Επειδή $0 \leq \eta \mu x \leq 1$ και

$$0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq 4x \leq 4\pi \Leftrightarrow e^0 \leq e^{4x} \leq e^{4\pi} \Leftrightarrow 1 \leq e^x \leq e \Leftrightarrow 1 \leq e^{4x} \leq e^{4\pi}$$

Άρα $\eta \mu x \leq 1 \leq e^{4x}$ με το $=$ να ισχύει για $x = 0$. Άρα $f(x) \leq g(x)$ στο $[0, \pi]$

Άρα η (1) γίνεται $E(\Omega) = -\int_0^{\pi} (e^x \eta \mu x - e^{5x}) dx = -\int_0^{\pi} e^x \eta \mu x dx + \int_0^{\pi} e^{5x} dx = -I + \left[\frac{e^{5x}}{5} \right]_0^{\pi}$ όπου

$$I = \int_0^{\pi} e^x \eta \mu x dx = \left[e^x \eta \mu x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sigma \upsilon \nu x dx =$$

$$-\left[e^x \sigma \upsilon \nu x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \eta \mu x dx = e^{\pi} + 1 - I \Leftrightarrow 2I = e^{\pi} + 1 \Leftrightarrow I = \frac{e^{\pi} + 1}{2}$$

$$\text{Άρα } E(\Omega) = -\frac{e^{\pi} + 1}{2} + \frac{e^{5\pi}}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2e^{\pi} - 5e^{\pi} - 7}{10}$$

Δ4. Η σχέση γίνεται $f(x) - \frac{1}{16}(4x - 3\pi)^2 = \frac{e^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow f(x) - f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2$

Προφανή ρίζα είναι το $x = \frac{3\pi}{4}$.

Όμως f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\frac{3\pi}{4}$ ισχύει $f(x) \leq f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow f(x) - f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \leq 0$ με το

$=$ να ισχύει για $x = \frac{3\pi}{4}$. Επίσης $\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 \geq 0$ με το $=$ να ισχύει για $x = \frac{3\pi}{4}$.

Άρα το $\frac{3\pi}{4}$ είναι η μοναδική ρίζα.

Επιμέλεια απαντήσεων:

Δραγώνας Μπάμπης

Γκιούλος Θεόδωρος

Διονυσοπούλου Σοφία

Μαθηματικοί

Φροντιστήριο Μ.Ε «ΕΠΙΛΟΓΗ» - Καλαμάτα

<http://www.epil.gr>