

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεωρία σχολικό σελ. 262
A2. Θεωρία σχολικό σελ. 141
A3. Θεωρία σχολικό σελ. 246 και 247
A4. α) → Λάθος
 β) → Σωστό
 γ) → Λάθος
 δ) → Σωστό
 ε) → Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f		$\swarrow$ OE $\searrow$	

$f \downarrow$ στο $(-\infty, 0]$ και $\uparrow$ στο $[0, +\infty)$. Παρουσιάζει Ο.Ε. στο 0 το $f(0) = 0$.

B2. $f''(x) = \frac{2(x^2+1)^2 - 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1)(x^2+1-4x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1-3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{3}/3$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$	
$f''(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$					

Η f κοίλη στα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ και κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, +\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Παρουσιάζει Σ.Κ. τα $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ και $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$

B3. Επειδή η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1. \text{ Άρα } y = 1 \text{ οριζόντια ασύμπτωτη στο } -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1. \text{ Άρα } y = 1 \text{ οριζόντια ασύμπτωτη στο } +\infty.$$

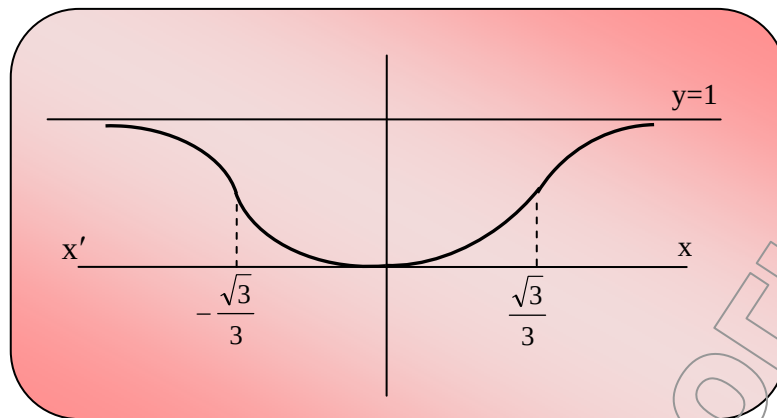
B4. Παρατηρώ ότι

- f είναι άρτια αφού $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2}{x^2 + 1} = f(x).$$

- Τέμνει τον $x'x$ και τον $\psi\psi$ στο $(0, 0)$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$	
$f''(x)$	-	0	+	+	0	-
$f'(x)$	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θεωρώ $h(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $h'(x) = e^{x^2} \cdot 2x - 2x = 2x(e^{x^2} - 1)$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $e^{x^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Επίσης επειδή $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \geq e^0 \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 \geq 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
2x	-	0	+
$e^{x^2} - 1$	+	0	+
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα $h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow h(x) \geq 0$ με το « = » να ισχύει για $x = 0$. Άρα η $x = 0$ είναι η λύση της εξίσωσης.

Γ2. $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow |f(x)| = |e^{x^2} - x^2 - 1| \Leftrightarrow |f(x)| = e^{x^2} - x^2 - 1$

Επειδή $f(x) \neq 0$ μόνο για $x = 0$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις

Αν $x > 0$. Επειδή $f(x) \neq 0$ και συνεχής στο $(0, +\infty)$, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Άρα $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, αν $f(x) > 0$

$$\text{ή } f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1), \text{ αν } f(x) < 0$$

Αν $x < 0$, η $f(x) \neq 0$ και συνεχής στο $(-\infty, 0)$ άρα διατηρεί πρόσημο οπότε

$$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1 \text{ αν } f(x) > 0$$

$$\text{ή } f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1) \text{ αν } f(x) < 0$$

$$\text{Άρα } f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R},$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x \geq 0 \\ -(e^{x^2} - x^2 - 1), & x < 0 \end{cases},$$

$$f(x) = \begin{cases} -(e^{x^2} - x^2 - 1), & x \geq 0 \\ e^{x^2} - x^2 - 1, & x < 0 \end{cases},$$

$$f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1), x \in \mathbb{R}$$

Γ3. $f(x) = e^{x^2} - x^2 - x, x \in \mathbb{R}$

$$\text{άρα } f'(x) = 2xe^{x^2} - 2x$$

$$\text{οπότε } f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} - 2$$

$$= 2e^{x^2} - 2x^2e^{x^2} - 2 + 6x^2e^{x^2}$$

$$= 2(e^{x^2} - x^2 - 1) + 6x^2e^{x^2} \geq 0 \text{ με το } = \text{ να ισχύει για } x = 0$$

Άρα f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ4. Θεωρώ $h(x) = f(x+3) - f(x), x \in [0, +\infty)$

$$\text{Είναι } h \text{ παραγωγίσιμη με } h'(x) = f'(x+3) - f'(x)$$

$$\text{Όμως } x+3 > x \geq 0 \Rightarrow f'(x+3) > f'(x).$$

$$\text{Άρα } h'(x) > 0 \Rightarrow h \uparrow \Rightarrow 1-1 \text{ στο } [0, +\infty).$$

$$\text{Άρα η εξίσωση γίνεται } h(|\eta\mu x|) = h(x) \Leftrightarrow |\eta\mu x| = x.$$

$$\text{Όμως } |\eta\mu x| \leq |x| \text{ οπότε για } x \geq 0 \text{ } |\eta\mu x| \leq x \text{ με το } = \text{ να ισχύει για } x = 0. \text{ Άρα } x = 0.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta\mu x dx = \pi$

$$\Leftrightarrow \int_0^\pi f(x) \eta\mu x dx + \int_0^\pi f''(x) \eta\mu x dx = \pi$$

$$\Leftrightarrow [-f(x) \sigma\upsilon\nu x]_0^\pi + \int_0^\pi f'(x) \sigma\upsilon\nu x dx + [f'(x) \eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) \sigma\upsilon\nu x dx = \pi$$

$$\Leftrightarrow -f(\pi)\sin\pi + f(0)\sin 0 + f'(\pi)\eta\mu\pi - f'(0)\eta\mu 0 = \pi$$

$$\Leftrightarrow f(\pi) + f(0) = \pi \quad (1)$$

Όμως $\frac{f(x)}{\eta\mu x} = g(x)$, με $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ οπότε $f(x) = g(x)\eta\mu x$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)\eta\mu x = 1 \cdot 0 = 0$ και επειδή f συνεχής άρα $f(0) = 0$.

Άρα $(1) \Rightarrow f(\pi) = \pi$

Οπότε $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot \eta\mu x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$.

Δ2.α) Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R} \xRightarrow{\text{Θ. Fermat}} f'(x_0) = 0$

Είναι $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$ οπότε παραγωγίζω

Οπότε $e^{f(x)} \cdot f'(x) + 1 = f'(f(x)) \cdot f'(x) + e^x$.

Για $x = x_0$ $e^{f(x_0)} f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) + e^{x_0} \xLeftrightarrow{f'(x_0)=0} 1 = e^{x_0} \Leftrightarrow x_0 = 0$

οπότε $f'(0) = 0$. Όμως ΑΤΟΠΟ, αφού $f'(0) \neq 1$

Άρα δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Δ2.β) Επειδή $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και επειδή f' συνεχής οπότε διατηρεί πρόσημο με $f'(0) = 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ άρα $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Επειδή $f(-\infty, +\infty) \stackrel{f \uparrow}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Άρα $\left| \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \right| = \left| \frac{1}{f(x)} \right| \cdot |\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x| \leq \frac{2}{|f(x)|}$ αφού

$|\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x| \leq |\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x| = 1 + 1 = 2$.

Οπότε $-\frac{2}{|f(x)|} \leq \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \leq \frac{2}{|f(x)|}$

Είναι $\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{|f(x)|} \right) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{|f(x)|} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Κ.Π.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$

Δ4. Είναι $\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx \stackrel{\substack{\ln x=u \\ \frac{1}{x}dx=du \\ x=1:u=0 \\ x=e^\pi:u=\pi}}{=} \int_0^\pi f(u) du.$

Είναι $0 \leq u \leq \pi$

$$\stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(0) \leq f(u) \leq f(\pi)$$

Οπότε $\int_0^\pi f(0) du < \int_0^\pi f(u) du < \int_0^\pi f(\pi) du$ με το « $\Rightarrow$ » να μην ισχύει για κάθε u .

$$\Leftrightarrow f(0)(\pi - 0) < \int_0^\pi f(u) du < f(\pi)(\pi - 0)$$

$$\Leftrightarrow 0 < \int_0^\pi f(u) du < \pi^2.$$

$$\text{Άρα } 0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2.$$

Επιμέλεια απαντήσεων:

Δραγώνας Μπάμπης

Γκιούλος Θεόδωρος

Διονυσοπούλου Σοφία

Μαθηματικοί

Φροντιστήριο Μ.Ε «ΕΠΙΛΟΓΗ» - Καλαμάτα

<http://www.epil.gr>