

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
(ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ) & ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1 Σχολικό βιβλίο σελ. 260

A2 Σχολικό βιβλίο σελ. 169

A3 Σχολικό βιβλίο σελ. 280

A4 α – λάθος, β – σωστό, γ – σωστό, δ – λάθος, ε – σωστό.

ΘΕΜΑ Β

B1. • $D_f = (1,5) \cup (5,9]$ (πεδίο ορισμού)

• $f(A) = (-2,5]$ (σύνολο τιμών)

B2.α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2.$

β) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2 \end{array} \right\} \text{ Δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

γ) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 3.$

δ) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = 4 \end{array} \right\} \text{ Δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 7} f(x)$

ε) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = 3.$

B3.α) Είναι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για $x < 2$ και $f(x) > 0$ για $x > 2$.

Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}.$

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (5,6) \cup (6,7).$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$

γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = 5.$ Θέτουμε $f(x) = t.$

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow 8} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 5} f(t) = 3.$$

- B4.** Η f δεν είναι συνεχής στα σημεία $x_1 = 3$ και $x_2 = 7$ του πεδίου ορισμού της γιατί $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ δεν υπάρχει (από B2) και $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ δεν υπάρχει (από B2).

- B5.** Τα σημεία x_0 στα οποία ισχύει $f'(x_0) = 0$ είναι τα $x_0 = 4$, $x_0 = 6$ και $x_0 = 8$ (εσωτερικά του D_f) γιατί η f είναι παραγωγίσιμη σ' αυτά (υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη) και παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

ΘΕΜΑ Γ

- Γ1.** Για $x < 0$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική συνάρτηση.

- Για $x > 0$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική συνάρτηση.

Στο $x_0 = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x + 1) = 1 \\ f(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \text{άρα η } f \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = 0, \text{ συνεπώς σε όλο το } \mathbb{R}.$$

- Γ2.** Για $x \in (-1, 0)$ είναι $f'(x) = (-x^2 + 1)' = -2x$.

- Για $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) = (-x + 1)' = -1$.

Στο $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1) = -1 \end{aligned}$$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, άρα δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής για την f στο $[-1, 1]$.

- Γ3.** Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της c_f .

- Αν $x_0 < 0$ η εξίσωση της εφαπτομένης της c_f στο M είναι

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y - (-x_0^2 + 1) = -2x_0(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -2x_0x + x_0^2 + 1.$$

$$A \in \text{εφαπτ.} \Leftrightarrow \frac{5}{4} = -2x_0 \cdot 0 + x_0^2 + 1 \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ \text{ή} \\ x_0 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Η τιμή $x_0 = \frac{1}{2}$ απορρίπτεται γιατί $x_0 < 0$.

Επομένως $y = x + \frac{5}{4}$ είναι η εξίσωση της εφαπτομένης στο Μ.

• Αν $x_0 > 0$ η εξίσωση της εφαπτομένης της c_f στο Μ είναι $y - (-x_0 + 1) = -(x - x_0) \Leftrightarrow y = -x + 1$.

Όμως το σημείο $A\left(0, \frac{5}{4}\right)$ δεν ανήκει στη παραπάνω ευθεία.

Επομένως η μοναδική εφαπτομένη της c_f που διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{5}{4}\right)$ είναι η $y = x + \frac{5}{4}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = (x^3)' = 3x^2 > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και συνεχής στο $x_0 = 0$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, συνεπώς "1-1".

Είναι $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Άρα $D_{f^{-1}} = f(A) = \mathbb{R}$.

Έστω $f(x) = y \Leftrightarrow x^3 = y \Leftrightarrow x = \begin{cases} \sqrt[3]{y}, & y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y}, & y < 0 \end{cases}$

Συνεπώς $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases}$

Δ2. Είναι $f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} \eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3 \Leftrightarrow \eta\mu x + \frac{1}{6}x^3 - x > 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \eta\mu x + \frac{1}{6}x^3 - x, x \in \mathbb{R}$.

Είναι $h'(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$

και $h''(x) = -\eta\mu x + x, x \in \mathbb{R}$.

Από πρόταση του σχολικού βιβλίου ισχύει:

$|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα αληθεύει μόνο για $x = 0$.

Για $x > 0$ είναι $|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x$.

Άρα $x - \eta\mu x > 0 \Leftrightarrow h''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Συνεπώς η $h'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Άρα για $x > 0 \stackrel{h' \uparrow}{\Leftrightarrow} h'(x) > h'(0) \Leftrightarrow h'(x) > 0$.

Επομένως η $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Άρα για $x > 0 \stackrel{h \uparrow}{\Leftrightarrow} h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow \eta\mu x + \frac{1}{6}x^3 - x > 0$.

Δ3. Είναι $y(t) = x^3(t)$

Άρα $y'(t) = (x^3(t))' = 3x^2(t) \cdot x'(t)$, $t \geq 0$ (1)

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_0 ισχύει $y'(t_0) = x'(t_0)$.

Από (1) έχουμε $y'(t_0) = 3x^2(t_0) \cdot x'(t_0) \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow 3x^2(t_0) = 1 \Leftrightarrow x^2(t_0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ή} \quad x(t_0) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (απορ.)}$$

Επομένως το σημείο M είναι το $M\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3\right)$, δηλαδή $M\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

Δ4. $f\left(\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+2}}\right) = f(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+2}} = x \Leftrightarrow f(x) = x\sqrt{x^2+2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^3 = x\sqrt{x^2+2} \Leftrightarrow x(x^2 - \sqrt{x^2+2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (1) \\ \text{ή} \\ x^2 - \sqrt{x^2+2} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{x^2+2} \Leftrightarrow x^4 = x^2 + 2 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 2 = 0.$$

$$\text{Θέτουμε } x^2 = \omega \geq 0. \text{ Άρα } \omega^2 - \omega - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = -1 & \text{(απορ.)} \\ \text{ή} \\ \omega = 2 & \text{(δεκτή)} \end{cases}$$

$$\text{Επομένως } x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt{2} \quad (3)$$

Από (1) και (3) προκύπτει ότι ρίζες της εξίσωσης είναι το 0, το $\sqrt{2}$ και το $-\sqrt{2}$.

ΚΟΥΡΤΟΓΛΟΥ ΘΕΑΓΕΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ – ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΣ