

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1 Σχολικό βιβλίο σελ. 253

A2 Σχολικό βιβλίο σελ. 141

A3 Σχολικό βιβλίο σελ. 246 – 247

A4 α – λάθος, β – σωστό, γ – λάθος, δ – σωστό, ε – σωστό.

ΘΕΜΑ Β

B1. Αρκεί $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + \alpha) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x) = 1 + \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \alpha = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 1$$

B2. Για $\alpha = 1$ είναι:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Για } x < 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2 \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ Για } x > 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, με $f(1) = 2$.

B3. $\psi - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow \psi - 2 = 2(x-1) \Leftrightarrow \psi = 2x$ είναι η εξίσωση της εφαπτομένης.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)' = \frac{2x}{(x^2+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	↗		

ο.ε.

Ολικό ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0) = 0$

Γ2. $f''(x) = \frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}, \quad x \in \mathbb{R}.$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1-3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$	
f''(x)	-	0	+	0	-

Γ3. • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της c_f και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

- Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f'(x) \cdot f(x) = x$ και $f(0) = 1$, οπότε

$$2f'(x) \cdot f(x) = 2x \Leftrightarrow (f^2(x))' = (x^2)'$$

Από συνέπεια του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$f^2(x) = x^2 + c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } x = 0, \quad f^2(0) = c \Leftrightarrow 1 = c.$$

$$\text{Άρα } f^2(x) = x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Είναι } x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow f^2(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή f συνεχής, η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Όμως $f(0) = 1 > 0$, άρα $f(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$$\text{Οπότε } f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta 2. f(x) - \lambda x = \sqrt{x^2 + 1} - \lambda x = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - \lambda x \stackrel{x > 0}{=} x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \lambda x =$$

$$= x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \lambda \right).$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \lambda \right) = 1 - \lambda.$

- Αν $1 - \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = +\infty.$
- Αν $1 - \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = -\infty.$
- Αν $1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, τότε $(+\infty) \cdot 0$ (απροσδιόριστη μορφή)

$$\text{Είναι } f(x) - \lambda x = x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) = x \cdot \frac{1 + \frac{1}{x^2} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1}.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{0}{2} = 0.$$

Δ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘ O.E. ↗		

Ολικό ελάχιστο το $f(0) = 1$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$$

• Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, 0]$ και συνεχής, οπότε:

$$f(\Delta_1) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [1, +\infty)$$

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [0, +\infty)$ και συνεχής, οπότε:

$$f(\Delta_2) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [1, +\infty)$$

$$\text{Οπότε } f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [1, +\infty).$$

$$\begin{aligned} \Delta 4. f(x) = \sin x &\stackrel{\sin x \geq 0}{\Leftrightarrow} f^2(x) = \sin^2 x \Leftrightarrow x^2 + 1 = \sin^2 x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + 1 - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow x^2 + \eta\mu^2 x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ και } \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

**ΚΟΥΡΤΟΓΛΟΥ ΘΕΑΓΕΝΗΣ
ΒΑΒΟΥΡΗΣ ΚΩΣΤΑΣ
ΠΟΡΦΥΡΑΚΗΣ ΠΟΛΥΚΑΡΠΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ – ΦΡΟΝΤΙΣΤΕΣ**

SCIENCE PRESS Στοιχειοθεσίες επιστημονικών κειμένων τηλ. 6974547422