

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .
Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι
η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
Μονάδες 7
- A2.** Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;
Μονάδες 4
- A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και
να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.
Μονάδες 4
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο
τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη
λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι
λανθασμένη.
- α)** Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$.
- β)** Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$
κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- γ)** Κάθε συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε
 $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$
- δ)** Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του
συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως
προς x .
- ε)** Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια
μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$

B1. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 7

B2. Αν $\alpha = 1$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 11

B3. Για την παραπάνω τιμή του α , να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f .

Μονάδες 7

Γ2. Να βρεθούν οι ρίζες και το πρόσημο της f'' .

Μονάδες 11

Γ3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

- $f'(x) \cdot f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Δ2. Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x)$.

Μονάδες 7

Δ3. Να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[1, +\infty)$.

Μονάδες 6

Δ4. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = \sin x$ στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ