

**ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΣΤΑ**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Παρασκευή, 10/06/2016

ΘΕΜΑ 1^ο

A1. Θεωρία , σχολικό βιβλίο σελίδα 38.

A2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελίδα 13.

A3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελίδα 92.

A4.

α) Σωστό.

β) Λάθος.

γ) Λάθος.

δ) Σωστό.

ε) Λάθος.

ΘΕΜΑ 2^ο

B1. $f(1) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{1+a} = 2 \Leftrightarrow a+1 = 4 \Leftrightarrow a = 3$

B2. Για $a = 3$ η συνάρτηση γίνεται $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}, x \in \mathbb{R}$$

Είναι $f'(1) = \frac{1}{2}$, $f(1) = 2$.

Έστω $y = \lambda x + \kappa$ με $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$ η ζητούμενη εφαπτομένη στο σημείο $A(1, f(1))$. Τότε

$\lambda = f'(1) = \frac{1}{2}$. Άρα είναι $y = \frac{1}{2}x + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$ (1). Οι συνετεταγμένες του σημείου A θα

επαληθεύουν την εξίσωση (1). Επομένως. $2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \kappa \Leftrightarrow \kappa = \frac{3}{2}$. Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη είναι $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

B3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+3}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}, x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = \sqrt{3}$.

B4. Το ζητούμενο όριο γράφεται διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+3} - 2) \cdot (\sqrt{x^2+3} + 2)}{(x - 1)(\sqrt{x^2+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3 - 4}{(x - 1)(\sqrt{x^2+3} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x - 1)(\sqrt{x^2+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2+3} + 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3°

Γ1 α). Έχουμε:

$$P(\Pi) = \frac{26}{51}$$

$$P(\Pi) = \frac{N(\Pi)}{N(\Omega)} = \frac{\lambda + 1}{2\lambda + 1} \Leftrightarrow \frac{\lambda + 1}{2\lambda + 1} = \frac{26}{51} \Leftrightarrow 52\lambda + 26 = 51\lambda + 51 \Leftrightarrow \lambda = 25$$

$$N(\Omega) = 2 \cdot 25 + 1 = 51$$

β) Έστω $N(M \cap A) = x$ το πλήθος των σφαιρών που είναι μπλέ με άρτια ένδειξη. Τότε:

$$P(M \cap A) = \frac{x}{51} \Leftrightarrow \frac{6}{51} = \frac{x}{51} \Leftrightarrow x = 6$$

Γ2. α) Τα M και K είναι ασυμβίβαστα και συμπληρωματικά μεταξύ τους, δηλαδή $M \cup K = \Omega$ και $M \cap K = \emptyset$. Άρα:

$$P(M \cup K) = P(M) + P(K) \Leftrightarrow 1 = P(M) + \frac{7}{10}P(M) \Leftrightarrow \frac{17P(M)}{10} = 1 \Leftrightarrow P(M) = \frac{10}{17}$$

Αν $N(M)$ το πλήθος των μπλε σφαιρών έχουμε:

$$P(M) = \frac{10}{17} \Leftrightarrow \frac{N(M)}{51} = \frac{10}{17} \Leftrightarrow N(M) = \frac{510}{17} \Leftrightarrow N(M) = 30$$

Άρα το πλήθος των κόκκινων σφαιρών είναι $N(K) = 51 - 30 = 21$.

β) Το πλήθος των μπλέ σφαιρών με περιττό αριθμό είναι $N(M \cap \Pi) = 30 - 6 = 24$, αφού οι 6 είναι μπλέ με άρτιο αριθμό. Επομένως:

$$P(M \cap \Pi) = \frac{N(M \cap \Pi)}{N(\Omega)} = \frac{24}{51}$$

γ) Το πλήθος των περιττών σφαιρών είναι 26. Οι μπλέ σφαίρες είναι 30. Από αυτές οι 6 είναι με άρτιο αριθμό. Άρα οι υπόλοιπες $30 - 6 = 24$ είναι μπλέ σφαίρες με περιττό αριθμό. Άρα οι $26 - 24 = 2$ είναι οι κόκκινες σφαίρες με περιττό αριθμό, δηλαδή $N(K \cap \Pi) = 2$. Άρα:

$$P(K \cap \Pi) = \frac{N(K \cap \Pi)}{N(\Omega)} = \frac{2}{51}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Δ1.

- Αν $v = \text{άρτιος}$, τότε $\delta = \frac{x_v + x_{\frac{v}{2}+1}}{2} = 3 \Leftrightarrow x_v + x_{\frac{v}{2}+1} = 6$ (δηλαδή το ημιάθροισμα των δύο «μεσαίων» παρατηρήσεων. Η μόνη δυνατότητα δοκιμάζοντας τις τιμές είναι $x_6 = x_7 = 3$.

Άρα $\frac{v}{2} = 6 \Leftrightarrow v = 12$

- Αν $v = \text{περιττός}$, τότε $\delta = x_{\frac{v+1}{2}} = 6$ που απορρίπτεται, αφού καμία παρατήρηση δεν έχει τιμή 6.

Επομένως $v = 12$.

Δ2. α)

x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$
0	1	0
1	3	3
2	1	2
3	2	6
4	4	16
x_6	1	x_6
ΣΥΝΟΛΟ	$v=12$	$27 + x_6$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot v_i}{v} \Leftrightarrow \frac{8}{3} = \frac{27 + x_6}{12} \Leftrightarrow 81 + 3x_6 = 96 \Leftrightarrow 3x_6 = 15 \Leftrightarrow x_6 = 5$$

β) Για το διάγραμμα των συχνοτήτων: σε ένα διάγραμμα $x_i - v_i$ υψώνουμε σε κάθε x_i μία κάθετη γραμμή με μήκος v_i . Ενώνοντας τα σημεία (x_i, v_i) παίρνουμε το πολύγωνο συχνοτήτων.

Δ3. Ο νέος πίνακας που διαμορφώνεται με βάση τα νέα δεδομένα είναι:

y_i	v_i	$x_i \cdot v_i$
1	2	2
2	3	6
3	2	6
4	4	16
5	1	5
ΣΥΝΟΛΟ	$v=12$	35

Αν είναι η νέα μέση τιμή έχουμε:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i \cdot v_i}{v} \Rightarrow \bar{y} = \frac{35}{12}$$

Επιστημονική επιμέλεια:

Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών