

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεωρία σχολικό σελ. 194
A2. Θεωρία σχολικό σελ. 188
A3. Θεωρία σχολικό σελ. 259
A4. α. → Λάθος
 β. → Σωστό
 γ. → Λάθος
 δ. → Σωστό
 ε. → Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. $|z-4| = 2|z-1| \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} z=x+yi, x,y \in \mathbb{R} \\ \end{matrix}$

$$\Leftrightarrow |(x-4)+yi| = 2|(x-1)+yi|$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 = 4(x-1)^2 + 4y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 \quad \text{κύκλος } 0(0,0), \rho=2 \quad \text{οπότε } |z| \neq 2$$

B2. $|z_1| = 2 \Rightarrow \overline{z_1} = \frac{4}{z_1}$

$$|z_2| = 2 \Rightarrow \overline{z_2} = \frac{4}{z_2}$$

$$\alpha) \quad \overline{w} = 2 \left(\frac{\overline{z_1}}{z_2} + \frac{\overline{z_2}}{z_1} \right) = 2 \left(\frac{\frac{4}{z_1}}{z_2} + \frac{\frac{4}{z_2}}{z_1} \right) = 2 \left(\frac{4}{z_1 z_2} + \frac{4}{z_1 z_2} \right) = 2 \left(\frac{z_2 + z_1}{z_1 z_2} \right) = w \Rightarrow w \in \mathbb{R}$$

β) θα δείξω ότι $|w| \leq 4$

$$|w| = \left| \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \right| \leq 2 \left| \frac{z_1}{z_2} \right| + 2 \left| \frac{z_2}{z_1} \right| \leq 2 \frac{|z_1|}{|z_2|} + 2 \frac{|z_2|}{|z_1|} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4.$$

Άρα $-4 \leq w \leq 4$

B3. Αφού $w = -4$ τότε $\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = -4$

$$\Leftrightarrow 2z_1^2 + 2z_2^2 = -4z_1z_2$$

$$\Leftrightarrow z_1^2 z_2^2 + 2z_1z_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1 = -z_2$$

$$\text{Άρα } (ΑΓ) = |z_1 - z_3| = |z_1 - 2iz_3| = |z_1| \cdot |1 - 2i| = 2\sqrt{1+4} = 2\sqrt{5}$$

$$(AB) = |z_2 - z_3| = |-z_1 - 2iz_1| = |z_1| \cdot |1 + 2i| = 2\sqrt{5} \text{ οπότε το } ABΓ \text{ είναι ισοσκελές.}$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma 1. f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow f \uparrow \text{ στο } \mathbb{R}.$$

$$f(-\infty, +\infty) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \frac{1}{x^2+1} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2+1} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

$$\Gamma 2. f(e^{3-x}(x^2+1)) = \frac{e^2}{5}$$

$$\Leftrightarrow f(e^{3-x}(x^2+1)) = f(2) \text{ όπου } e^{3-x}(x^2+1) > 0. \text{ Άρα } f \uparrow \text{ στο } (0, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow e^{3-x}(x^2+1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^3(x^2+1)}{e^x} = 2 \Leftrightarrow e^3 = \frac{2e^x}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^3}{2} = \frac{e^x}{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^3}{2} \in f(-\infty, +\infty) = (0, +\infty) \text{ άρα έχει μοναδική ρίζα στο } \mathbb{R}.$$

$$\Gamma 3. \text{Θ.Μ.Τ. για την } \varphi(x) = \int_0^x f(t)dt \text{ στο } [2x, 4x]$$

$$-\text{φ συνεχής } [2x, 4x] \text{ ως παρ/μη αφού } f(t) \text{ συνεχής} \Rightarrow \int_0^x f(t)dt \text{ παραγωγίσιμη}$$

$$-\text{φ παρ/μη } (2x, 4x) \text{ με } \varphi'(x) = f(x).$$

$$\text{Άρα υπάρχει } \xi \in (2x, 4x) \text{ το } \varphi'(\xi) = \frac{\varphi(4x) - \varphi(2x)}{4x - 2x}$$

$$\Leftrightarrow f(\xi) = \frac{\int_0^{4x} f(t)dt - \int_0^{2x} f(t)dt}{2x}$$

$$\Leftrightarrow f(\xi) = \frac{\int_{2x}^{4x} f(t) dt}{2x}$$

$$\text{Όμως } 2x < \xi < 4x \xrightarrow{f \uparrow} \Leftrightarrow f(\xi) < f(4x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\int_{2x}^{4x} f(t) dt}{2x} < f(4x)$$

$$\Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t) dt < 2xf(4x)$$

Γ4. Για $x > 0$ η $g(x) = \frac{\int_{2x}^{4x} f(t) dt}{x}$ παρ/μη ως πηλίκο των παρ/μων $\int_{2x}^{4x} f(t) dt$ και x

$$\begin{aligned} \text{Η } g \text{ συνεχής στο } 0 \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_{2x}^{4x} f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\int_0^{2x} f(t) dt + \int_0^{4x} f(t) dt}{x} \\ &\stackrel{0/0}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0} \frac{-2f(2x) + 4f(4x)}{1} = 2f(0) = 2 \cdot 1 = 2 = g(0). \end{aligned}$$

Άρα g συνεχής στο 0 .

$$\text{Για } x > 0 \quad g'(x) = \frac{x \left(\int_{2x}^{4x} f(t) dt \right)' - \int_{2x}^{4x} f(t) dt}{x^2}$$

$$= \frac{x \cdot (-2f(2x) + 4f(4x)) - \int_{2x}^{4x} f(t) dt}{x^2}$$

$$= \frac{-2xf(2x) + 2xf(4x) + 2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t) dt}{x}$$

$$= \frac{2x(f(4x) - f(2x)) + (2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t) dt)}{x} > 0$$

όπου από Γ3 $\int_{2x}^{4x} f(t) dt < 2xf(4x)$ και $f(2x) < f(4x)$ αφού $2x < 4x$ και $f \uparrow$.

Άρα $g \uparrow$ στο $[0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. f'(x)e^{f(x)} + f'(x)e^{-f(x)} = 2 \Leftrightarrow (e^{f(x)} - e^{-f(x)})' = (2x)' \text{ άρα}$$

$$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c$$

$$\stackrel{x=0}{\Rightarrow} \stackrel{c=0}{e^{f(x)} - e^{-f(x)}} = 2x$$

$$\Rightarrow e^{f(x)} - \frac{1}{e^{f(x)}} = 2x$$

$$\Rightarrow e^{2f(x)} - 1 = 2xe^{f(x)}$$

$$\Rightarrow e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} + x^2 = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow |e^{f(x)} - x| = \sqrt{x^2 + 1} \neq 0$$

Η $e^{f(x)} - x \neq 0$ και συνεχής οπότε διατηρεί πρόσημο με $e^{f(0)} - 0 = e^{f(0)} = 1 > 0$
 άρα $e^{f(x)} - x > 0$ οπότε

$$e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\Delta 2. \alpha) f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f''(x) = \frac{-\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)'}{x^2 + 1} = \frac{-x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f''(x) = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	+	-	
f	↖	↘	

Σημείο καμπής $(0, f(0))$

$$\Delta 2. \beta) E(\Omega) = \int_0^1 |f(x) - x| dx$$

Η εφαπτομένη στο $(0, f(0))$: $\psi - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow \psi = x$

Αφού f κοίλη στο $[0, 1] \Rightarrow f(x) \leq x$ Άρα

$$\begin{aligned}
 E(\Omega) &= \int_0^1 (x - f(x)) dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 x f'(x) dx \\
 &= \frac{1}{2} - [x f(x)]_0^1 + \int_0^1 x f'(x) dx \\
 &= \frac{1}{2} - f(1) + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \\
 &= \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \left[\sqrt{x^2 + 1} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\Delta 3. \text{ Για } x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \ln |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \ln f(x)$$

$$\mu\epsilon \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty \quad \mu\epsilon \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \quad \kappa\alpha\iota \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) = 0$$

$$\text{Άρα } (1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{f(x)} f(x) \ln f(x) = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\mu\epsilon \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{f(x)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} \cdot f^2(x)}{f'(x)} = \frac{e^0 \cdot 0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \ln f(x) \stackrel{f(x)=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} u \cdot \ln u = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{u}}{\frac{-1}{u^2}} = \lim_{u \rightarrow 0^+} (-u) = 0.$$

$$\text{Λ4. } K(x) = (x-2) \left(1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt \right) + (x-3) \left(8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt \right), x \in [2, 3]$$

$$f \text{ συνεχής} \Rightarrow \int_0^x f^2(t) dt \text{ παραγωγίσιμη} \Rightarrow \int_0^{x-2} f^2(t) dt$$

$$\text{παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων και η } \int_0^x f(t^2) dt \text{ παραγωγίσιμη}$$

$$K \text{ συνεχής } [2, 3] \text{ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών}$$

$$K(2) = 3 \int_0^2 f^2(t) dt - 8$$

$$K(3) = 1 - 3 \int_0^1 f(t^2) dt$$

$$\text{Για } x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0. \text{ Άρα } f(t) > 0, f(t^2) > 0$$

$$\text{Από Δ2 } 0 < f(x) \leq x \text{ άρα}$$

$$0 < f(t^2) \leq t^2 \Rightarrow \int_0^1 f^2(t) dt < \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \Rightarrow 0 < 1 - 3 \int_0^1 f^2(t) dt \Rightarrow K(3) > 0$$

$$0 < f^2(t) \leq t^2 \Rightarrow \int_0^2 f^2(t) dt < \int_0^2 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow 3 \int_0^2 f^2(t) dt < 8 \Rightarrow K(2) < 0$$

$$\text{Άρα } K(2)K(3) < 0. \text{ Από θεώρημα Bolzano υπάρχει } x_0 \in (2, 3) \text{ τέτοιο ώστε } K(x_0) = 0$$

Επιμέλεια απαντήσεων:

Δραγώνας Μπάμπης

Γκιούλος Θεόδωρος

Διονυσοπούλου Σοφία

Μαθηματικοί

Φροντιστήριο Μ.Ε «ΕΠΙΛΟΓΗ» - Καλαμάτα

<http://www.epil.gr>