

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεωρία σχολικό σελ. 31
A2. Θεωρία σχολικό σελ. 22
A3. Θεωρία σχολικό σελ. 87
A4. α. → Λάθος
 β. → Σωστό
 γ. → Λάθος
 δ. → Λάθος
 ε. → Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. $(3x-1) \cdot (8x^2-6x+1) = 0$

$$\Leftrightarrow 3x-1=0 \quad \text{ή} \quad 8x^2-6x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} = 0 \quad \text{ή} \quad x_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Επειδή } A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$$

$$\text{Άρα } P(A \cap B) = \frac{1}{4}, P(A) = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

B2. $P(A' - B') = P(A' \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$.

όπου

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$P(B) = P(A) + P(A \cap B) + P(A \cup B) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{6}{12} = \frac{5}{12}.$$

$$P(\Delta) = \left(P(A \cap B) \right)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

B3. $P[(A-B) \cup (B-A)] = P(A-B) + P(B-A) =$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

B4. Είναι $9x^2 - 3x - 2 = 0$, $x = \frac{3 \pm 9}{18} = \begin{matrix} \nearrow \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \\ \searrow \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3} \end{matrix}$ απορρίπτεται

Άρα $P(\Gamma) = \frac{2}{3}$.

Έστω B, Γ ασυμβίβαστα.

Τότε $P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{5}{12} + \frac{8}{12} = \frac{13}{12} > 1$ απορρίπτεται.

Άρα δεν είναι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές	Σχετική συχνότητα	%
$[8,10)$	9	10	
$[10,12)$	11	α	
$[12,14)$	13	30	
$[14,16)$	15	β	
$[16,18)$	17	30	

$$\alpha_3 = 108 \Leftrightarrow \alpha_3 = 360 \cdot f_3 \Leftrightarrow f_3 = \frac{108}{360} = 0,3.$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^5 x_i f_i = 9 \cdot \frac{10}{100} + 11 \cdot \frac{\alpha}{100} + 13 \cdot \frac{30}{100} + 15 \cdot \frac{\beta}{100} + 17 \cdot \frac{30}{100} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1.400 = 90 + 11\alpha + 390 + 15\beta + 510 \Leftrightarrow 11\alpha + 15\beta = 410 \quad (1)$$

$$\text{Επειδή } \sum_{i=1}^5 f_i = 1 \Leftrightarrow 10 + \alpha + 30 + \beta + 30 = 100 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 30 \quad (2)$$

Από (1) και (2) $\beta = 20$ και $\alpha = 10$.

Άρα $f_1 \% = 10\%$, $f_2 \% = \alpha = 10$, $f_3 \% = 30$, $f_4 \% = \beta = 20$, $f_5 \% = 30$

Γ2. $S^2 = \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 f_i$

$$= (9-14)^2 \cdot 0,1 + (11-14)^2 \cdot 0,1 + (13-14)^2 \cdot 0,3 + (15-14)^2 \cdot 0,2 + (17-14)^2 \cdot 0,3 =$$

$$= 25 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,2 + 9 \cdot 0,3 = 2,5 + 0,9 + 0,3 + 0,2 + 2,7 = 6,6$$

$$\text{Άρα } S = \sqrt{6,6} \approx 2,57 \text{ οπότε } CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{2,57}{14} \approx 0,18 \text{ ή } 18 \% \text{ άρα το δείγμα δεν είναι}$$

ομοιογενές.

$$\begin{aligned} \Gamma 3. \quad \bar{x} &= \frac{1}{v} \sum_{i=1}^5 x_i v_i \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i + x_5 v_5}{v} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{v} + \frac{x_5 v_5}{v} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{1.780}{v} + x_5 f_5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 14 = \frac{1.780}{v} + 17 \cdot 0,3 \Leftrightarrow 14 - 5,1 = \frac{1.780}{v} \Leftrightarrow 8,9 = \frac{1.780}{v} \Leftrightarrow v = 200. \end{aligned}$$

$$\Gamma 4. \text{ Είναι } \beta_i = \frac{1}{S_\alpha} \alpha_i - \frac{\bar{\alpha}}{S_\alpha} \text{ οπότε από εφαρμογή του σχολικού}$$

$$\bar{\beta} = \frac{1}{S_\alpha} \bar{\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{S_\alpha} = 0 \text{ και } S_\beta = \left| \frac{1}{S_\alpha} \right| S_\alpha = \frac{1}{S_\alpha} S_\alpha = 1.$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Lambda 1. \quad \Lambda \Gamma^2 = x^2 + \psi^2 \Leftrightarrow 10^2 = x^2 + \psi^2 \Leftrightarrow \psi^2 = 100 - x^2 \text{ οπότε } \psi = \sqrt{100 - x^2}$$

με $0 < x < 2\rho \Leftrightarrow 0 < x < 10$

$$\text{Τότε } f(x) = x\psi = x \cdot \sqrt{100 - x^2}, \quad 0 < x < 10$$

$$\begin{aligned} \Lambda 2. \quad f'(x) &= \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{100 - x^2}} (-2x) = \sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \\ &= \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 100 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow x = \pm 5\sqrt{2} \quad \text{και επειδή } 0 < x < 10 \text{ άρα}$$

$$x = 5\sqrt{2}$$

x	0	$5\sqrt{2}$	10
f'(x)		+	-
f		↗	↘

$$\text{Για } x = 5 \text{ το } \psi = \sqrt{100 - 25 \cdot 2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

$$\Delta 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98 \cdot x} = \frac{1}{98} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = \frac{1}{98} f'(1) = \frac{1}{98} \cdot \frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}}.$$

Δ4. Είναι $0 < P(A-B) \leq 1$ (1)

$$0 < P(A) \leq 1 \Leftrightarrow 0 < P^2(A) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -P^2(A) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 99 < 100 - P^2(A) < 100 \Leftrightarrow \sqrt{99} \leq \sqrt{100 - P^2(A)} < 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{99}} \geq \frac{1}{\sqrt{100 - P^2(A)}} > \frac{1}{10} \quad (2)$$

Από (1)·(2) $\Rightarrow 0 < \frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \leq \frac{1}{\sqrt{99}}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{99}}\right] \subseteq (0, 5\sqrt{2}] \text{ . Όμοια } 0 < \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} \leq \frac{1}{\sqrt{99}} \text{ οπότε}$$

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}\right) \xrightarrow{f \uparrow} \frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \leq \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A-B) \sqrt{100 - P^2(A-B)} \leq P(A) \sqrt{100 - P^2(A)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(P(A-B)) \leq f(P(A)) \text{ με } P(A-B) \subseteq P(A) \in (0, 1] \subseteq (0, 5\sqrt{2}] \text{ οπότε } f \uparrow$$

$$\xrightarrow{f \uparrow} \Leftrightarrow P(A-B) \leq P(A) \text{ όπου ισχύει γιατί } A-B \subseteq A.$$

Επιμέλεια απαντήσεων:

Δραγώνας Μπάμπης

Γκιούλος Θεόδωρος

Διονυσοπούλου Σοφία

Μαθηματικοί

Φροντιστήριο Μ.Ε «ΕΠΙΛΟΓΗ» - Καλαμάτα

<http://www.epil.gr>