

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 194

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 188

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 259

A4. α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Λάθος, δ. Σωστό, ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

B1. $|z - 4| = 2 \cdot |z - 1| \Leftrightarrow |z - 4|^2 = 4 \cdot |z - 1|^2 \Leftrightarrow$

$$(z - 4)(\bar{z} - 4) = 4(z - 1)(\bar{z} - 1) \Leftrightarrow$$

$$z\bar{z} - 4\bar{z} - 4z + 16 = 4z\bar{z} - 4\bar{z} - 4z + 4 \Leftrightarrow$$

$$-3z\bar{z} = -12 \Leftrightarrow z\bar{z} = 4 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2$$

B2. α) $|z_1| = 2 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 4 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 = 4 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{4}{z_1}$

$$|z_2| = 2 \Leftrightarrow |z_2|^2 = 4 \Leftrightarrow z_2\bar{z}_2 = 4 \Leftrightarrow \bar{z}_2 = \frac{4}{z_2}$$

$$\bar{w} = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = \frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{2\cancel{z_1}}{\cancel{z_2}} + \frac{2\cancel{z_2}}{\cancel{z_1}}$$

$$= \frac{2z_2}{z_2} + \frac{2z_1}{z_1} = w, \text{ άρα } w \in \mathbb{R}.$$

$$\beta) |w| = \left| \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \right| \leq \left| \frac{2z_1}{z_2} \right| + \left| \frac{2z_2}{z_1} \right| = \frac{2|z_1|}{|z_2|} + \frac{2|z_2|}{|z_1|} = 4$$

$$|w| \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad w \in \mathbb{R} \quad -4 \leq w \leq 4$$

B3. Για $w = -4$ είναι $-4 = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z_1 z_2}{z_2^2} + \frac{z_1 z_2}{z_1^2} = -4$

$$-4z_1 z_2 = 2z_1^2 + 2z_2^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$z_1^2 + z_2^2 + 2z_1 z_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z_1 + z_2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$z_1 + z_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = -z_2$$

- $(A\Gamma) = |z_1 - z_3| = |z_1 - 2iz_1| = |z_1(1 - 2i)| = |z_1| \cdot |1 - 2i| = \sqrt{5}|z_1|$

- $(B\Gamma) = |z_2 - z_3| = |-z_1 - 2iz_1| = |z_1(-1 - 2i)| = |z_1| \cdot |-1 - 2i| = \sqrt{5}|z_1|$

άρα $(A\Gamma) = (B\Gamma)$ δηλαδή το $\triangle A\Gamma B$ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = -\frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^2} \cdot (\sqrt{x^2+1})' = -\frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{-x}{(\sqrt{x^2+1})^3}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	+		-
f(x)	↗		↘

- $\Delta_1 = (-\infty, 0]$ με f γνησίως αύξουσα στο Δ_1

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(0) \right] = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, 1 \right] = (0, 1]$$

- $\Delta_2 = (0, +\infty)$ με f γνησίως φθίνουσα στο Δ_2

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, f(0) \right) = (0, 1)$$

άρα σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = (0, 1]$

Γ2. Είναι $0 < f(x) \leq 1$ $\Leftrightarrow$ $f \downarrow \text{ στο } (0, 1]$ $\Leftrightarrow f(f(x)) \geq f(1) \Leftrightarrow f(f(x)) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$f(f(x)) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x} \stackrel{\text{DL'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(1+x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(1+x) = f'(1) = \frac{-1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

ή $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} \stackrel{\text{ορισμός παραγώγου}}{=} f'(1) = \frac{-1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

Γ4. (ε) : η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$

(ε) : $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Το σημείο $(3, 0)$ ανήκει στην ευθεία (ε), άρα

$-f(x_0) = f'(x_0) \cdot (3 - x_0) \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{x_0^2 + 1}} = \frac{-x_0}{(x_0^2 + 1) \cdot \sqrt{x_0^2 + 1}} \cdot (3 - x_0) \Leftrightarrow$

$1 = \frac{3x_0 - x_0^2}{x_0^2 + 1} \Leftrightarrow x_0^2 + 1 = 3x_0 - x_0^2 \Leftrightarrow 2x_0^2 - 3x_0 + 1 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1 > 0$

$x_0 = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

• $x_0 = 1 \rightarrow (\varepsilon_1) : y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow (\varepsilon_1) : y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (x - 1) \Leftrightarrow$

$(\varepsilon_1) : y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow (\varepsilon_1) : y = -\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{3\sqrt{2}}{4}$

• $x_0 = \frac{1}{2} \rightarrow (\varepsilon_2) : y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow (\varepsilon_2) : y - \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{4\sqrt{5}}{25} \left(x - \frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow (\varepsilon_2) : y - \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{4\sqrt{5}}{25}x + \frac{2\sqrt{5}}{25} \Leftrightarrow (\varepsilon_2) : y = -\frac{4\sqrt{5}}{25}x + \frac{12\sqrt{5}}{25}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{1 - \sin x - x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{x} = \frac{1 - \sin x}{x} - \frac{x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{x}$$

$$= \frac{1 - \sin x}{x} - x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$$

$$f(0) \stackrel{\text{f σχης}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 - \sin x}{x} + x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0, \text{ διότι}$$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sin x}{x} = 0$ και

• $-1 \leq \eta\mu \frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow -|x| \leq x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \leq |x|$ κριτήριο

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 0$ $\Rightarrow$ παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$

$$\text{άρα } f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sin x}{x} - x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Δ2. Για $x \neq 0$:

$$f'(x) = \left(\frac{1 - \sin x}{x} - x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)' = \left(\frac{1 - \sin x}{x} \right)' - \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)'$$

$$= \frac{(1 - \sin x)' \cdot x - (1 - \sin x) \cdot (x)'}{x^2} - \left[(x)' \cdot \eta\mu \frac{1}{x} + x \cdot \left(\eta\mu \frac{1}{x} \right)' \right]$$

$$= \frac{\eta\mu x \cdot x - (1 - \sin x) \cdot 1}{x^2} - 1 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} - x \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} \right)'$$

$$= \frac{x \cdot \eta\mu x - 1 + \sin x}{x^2} - \eta\mu \frac{1}{x} - x \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)$$

$$= \frac{x \cdot \eta\mu x - 1 + \sin x}{x^2} - \eta\mu \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{x}$$

Δ3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \sin x}{x} - x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = -1$, διότι

$\bullet -1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\sin x \leq 1 \Leftrightarrow$
 $0 \leq 1 - \sin x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1 - \sin x}{x} \leq \frac{2}{x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$

$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) \stackrel{\substack{\frac{1}{x} = \omega \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\omega} \cdot \eta\mu \omega \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu \omega}{\omega} = 1$

$\left. \begin{array}{l} \bullet -1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\sin x \leq 1 \Leftrightarrow \\ 0 \leq 1 - \sin x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1 - \sin x}{x} \leq \frac{2}{x} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο} \\ \text{παρεμβολής} \end{array} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sin x}{x} = 0$

άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ είναι η ευθεία $y = -1$

Δ4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1 < 0$, άρα υπάρχει θετικός $\theta > \frac{1}{\pi}$, ώστε $f(\theta) < 0$

• f συνεχής στο $\left[\frac{1}{\pi}, \theta \right]$

$\bullet f\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{1 - \sin \frac{1}{\pi}}{\frac{1}{\pi}} - \frac{1}{\pi} \cdot \eta\mu \frac{1}{\frac{1}{\pi}} = \pi \cdot \left(1 - \sin \frac{1}{\pi} \right) - \frac{1}{\pi} \cdot \eta\mu \pi$
 $= \pi \cdot \left(1 - \sin \frac{1}{\pi} \right) > 0$

• $f(\theta) < 0$

από Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης

$f(x) = 0$ στο διάστημα $\left(\frac{1}{\pi}, \theta \right) \subseteq \left(\frac{1}{\pi}, +\infty \right)$

Επιμέλεια απαντήσεων: Φροντιστήρια «Κελάφας»