

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c, c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ , και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c, c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

Μονάδες 4

A3. Πότε η ευθεία $X=X_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $z \in \mathbb{C}$, τότε $\overline{(z^v)} = (\overline{z})^v$, όπου v θετικός ακέραιος.

β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

δ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- ε) Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[α,β]$ και G είναι μία παράγουσα της f στο $[α,β]$, τότε πάντοτε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς Z, W για τους οποίους ισχύουν:

- $|z - 3i|^2 - 18 = |z - 3|^2$
- $|w - i| = \operatorname{Im}(w) + 1$

- B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών Z είναι η ευθεία με εξίσωση $x - y - 3 = 0$

Μονάδες 9

- B2.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών W είναι η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{4}x^2$

Μονάδες 9

- B3.** Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς Z, W να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|Z - W|$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - \ln x, x \in (0, +\infty)$

- Γ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g με

$$g(x) = \int_1^{h(x)} \sqrt{t^2 - 1} \, dt,$$

$$\text{όπου } h(x) = f(x^2 + 1) - f(2) + 1.$$

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = 1$$

έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες x_1, x_2

Μονάδες 6

Γ4. Αν για τις ρίζες x_1, x_2 του ερωτήματος **Γ3** ισχύει ότι $x_1 < x_2$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_1, 1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(x^2 - x) \cdot f'(x) + x \cdot f(x) = 1, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι

$$\int_1^x f(t) \, dt = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{f(t)}{t} \, dt, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Μονάδες 4

Δ3. α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = - \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{f(t)}{t} dt, x \in (0, +\infty)$$

είναι κοίλη.

(μονάδες 5)

β. Έστω E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο που η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα x' και την ευθεία $x=3$. Να αποδείξετε ότι $E < 2$. (μονάδες 4)

Μονάδες 9

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{\frac{1}{x}}^x f(t) dt \geq \frac{1}{x} \int_{\frac{1}{x}}^x t f(t) dt, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ωρα δυνατής αποχώρησης: 18:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ