

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2015 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Σχολικό βιβλίο σελ. 150
A2. Σχολικό βιβλίο σελ. 16
A3. Σχολικό βιβλίο σελ. 96
A4. α – λάθος, β – σωστό, γ – σωστό, δ – λάθος, ε – λάθος.

ΘΕΜΑ Β

B1. Ισχύουν $f(-2) = 0$ (1) και $f'(-2) = 0$. (2)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3ax^2 + 2\beta x$.

$$\left. \begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow -8\alpha + 4\beta - 4 = 0 \Leftrightarrow -2\alpha + \beta = 1 \\ (2) &\Leftrightarrow 12\alpha - 4\beta = 0 \Leftrightarrow 3\alpha - \beta = 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ και } \beta = 3.$$

B2. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 3$ είναι $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ και $f'(x) = 3x^2 + 6x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ x = -2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		τ.μ.	τ.ε.	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2]$ στο και $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 0]$. Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -2$ το $f(-2) = 0$ και τοπικό ε-

λάχιστο στο $x_2 = 0$ το $f(0) = -4$.

B3. Η εφαπτομένη της c_f έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης στο σημείο M στο οποίο η $f'(x)$ γίνεται ελάχιστη.

Είναι $f''(x) = 6x + 6$, $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Η $f'(x)$ γίνεται ελάχιστη για $x = -1$.

Άρα το σημείο της c_f είναι το $M(-1, f(-1)) = (-1, -2)$. ✓

$$\begin{aligned}
 \text{B4. } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2+6x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}} = \frac{0}{0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(3x^2+6x) \cdot (\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})} = \frac{0}{0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x(x+2) \cdot (\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}{x^2+1-5} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x(x+2) \cdot (\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}{(x+2)(x-2)} = \frac{-6 \cdot 2\sqrt{5}}{-4} = 3\sqrt{5}.
 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν c είναι το πλάτος της κάθε κλάσης, τότε οι κλάσεις είναι της μορφής $[0,c)$, $[c,2c)$, $[2c,3c)$, $[3c,4c)$, $[4c,5c)$.

• Είναι $\frac{4c+5c}{2} = 18 \Leftrightarrow 9c = 36 \Leftrightarrow c = 4$.

Γ2. Είναι $\alpha_5 = 36^\circ \Leftrightarrow f_5 \cdot 360^\circ = 36^\circ \Leftrightarrow f_5 = 0,1$.

Ισχύει $f_5 = 0,1 \Leftrightarrow \frac{v_5}{v} = 0,1 \Leftrightarrow v_5 = 0,1 \cdot v$ (1)

• $\frac{N_1}{4} = \frac{N_2}{9} = \frac{N_3}{15} = \frac{N_4}{18} \Leftrightarrow \frac{v_1}{4} = \frac{v_1+v_2}{9} = \frac{v_1+v_2+v_3}{15} = \frac{v_1+v_2+v_3+v_4}{18}$.

Αλλά $v_1+v_2+v_3+v_4 = v - v_5 \Leftrightarrow v_1+v_2+v_3+v_4 = 0,9 \cdot v$.

Επομένως: $\frac{v_1}{4} = \frac{v_1+v_2}{9} = \frac{v_1+v_2+v_3}{15} = \frac{0,9 \cdot v}{18}$. Άρα:

• $\frac{v_1}{4} = \frac{0,9 \cdot v}{18} \Leftrightarrow \frac{v_1}{v} = \frac{0,9 \cdot 4}{18} \Leftrightarrow \frac{v_1}{v} = 0,2 \Leftrightarrow f_1 = 0,2$.

• $\frac{v_1+v_2}{9} = \frac{0,9 \cdot v}{18} \Leftrightarrow \frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} = \frac{0,9 \cdot 9}{18} \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 0,45$.

Άρα $f_2 = 0,25$.

• $\frac{v_1+v_2+v_3}{15} = \frac{0,9 \cdot v}{18} \Leftrightarrow \frac{v_1}{15} + \frac{v_2}{15} + \frac{v_3}{15} = \frac{0,9 \cdot 15}{18} \Leftrightarrow f_1 + f_2 + f_3 = 0,75$.

Άρα $f_3 = 0,30$.

$$\bullet f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Leftrightarrow f_4 = 1 - (0,2 + 0,25 + 0,30 + 0,1) \Leftrightarrow f_4 = 0,15.$$

Κλάσεις	x_i	$f_i\%$
[0,4)	2	20
[4,8)	6	25
[8,12)	10	30
[12,16)	14	15
[16,20)	18	10
		100

Γ3. Το ποσοστό των συνδρομητών του δείγματος οι οποίοι έχουν χρεωθεί τουλάχιστον 3 ώρες και λιγότερες από 10 ώρες ομιλίας, είναι το $\frac{1}{4}$ της πρώτης κλάσης, όλοι της δεύτερης κλάσης και το $\frac{1}{2}$ της τρίτης κλάσης.

$$\text{Άρα συνολικά } \frac{1}{4}f_1\% + f_2\% + \frac{1}{2}f_3\% = 5\% + 25\% + 15\% = 45\%.$$

Γ4. Επειδή οι συνδρομητές δεν πληρώνουν μέχρι 4 ώρες, εξαιρούνται όλοι οι συνδρομητές της 1^{ης} κλάσης και οι 4 εναπομείνουσες κλάσεις είναι [0,4), [4,8), [8,12) και [12,16).

Θεωρώντας ότι όλοι οι συνδρομητές είναι 100, αυτοί που απομένουν είναι 80 με συχνότητες $v_1 = 25$, $v_2 = 30$, $v_3 = 15$, και $v_4 = 10$.

Άρα η νέα μέση τιμή είναι:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 25 + 6 \cdot 30 + 10 \cdot 15 + 14 \cdot 10}{80} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{520}{80} \Leftrightarrow \bar{x} = 6,5.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω $ΚΛ = ΛΜ = ΜΝ = ΝΚ = \alpha$ γιατί τα τρίγωνα $ΑΚΝ$, $ΒΚΛ$, $ΓΜΛ$, $ΔΜΝ$ είναι ίσα, επειδή $ΚΒ = ΛΓ = ΔΜ = ΑΜ = 4 - x$ και είναι ορθογώνια.

$$\begin{aligned} \text{Ισχύει } ΚΛ^2 &= ΚΒ^2 + ΒΛ^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = (4-x)^2 + x^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 2x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 = 2(x^2 - 4x + 8). \end{aligned}$$

$$\text{Έτσι } E(ΚΛΜΝ) = \alpha^2 = 2(x^2 - 4x + 8) \text{ τ.μ.}$$

$$\text{Άρα } E(x) = 2(x^2 - 4x + 8) \text{ τ.μ.}$$

$$\mu\epsilon \begin{cases} x > 0 \\ 4-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0,4)$$

Δ2. Είναι $E'(x) = 4x - 8, x \in (0,4)$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$

Το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο για $x = 2$.

x	0	2	4
E'(x)		-	+
E(x)		ολ. ελαχ.	

Δ3.α) Είναι $y_i = E(x_i) = 2x_i^2 - 8x_i + 16 \Leftrightarrow x_i^2 = \frac{y_i}{2} + 4x_i - 8.$

Από εφαρμογή του σχολικού βιβλίου ισχύει:

$$\overline{x_i^2} = \frac{\overline{y_i}}{2} + 4\overline{x_i} - 8 \Leftrightarrow \overline{x_i^2} = 4,01 + 4 \cdot 2 - 8 \Leftrightarrow \overline{x_i^2} = 4,01.$$

$$\beta) \text{ Είναι } s^2 = \frac{1}{19} \left\{ \sum_{i=1}^{19} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{19} x_i \right)^2}{19} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^2 = \frac{1}{19} \sum_{i=1}^{19} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{19} x_i \right)^2}{19^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^2 = \overline{x_i^2} - \overline{x_i}^2 \Leftrightarrow s^2 = 4,01 - 4 \Leftrightarrow s^2 = 0,01 \Leftrightarrow s = 0,1.$$

$$\bullet \text{ CV} = \frac{s}{\overline{x_i}} = \frac{0,1}{2} = 0,05 < 0,1.$$

Άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

γ) • Επειδή $n = 19$ (περιττός), η διάμεσος είναι η δέκατη παρατήρηση.

Άρα $\delta = x_{10} = 2$.

Επομένως 9 παρατηρήσεις είναι μικρότερες του 2 και 9 μεγαλύτερες του 2. Έτσι:

$$x_i^2 \geq 4 \Leftrightarrow x_i \geq 2.$$

$$\text{Άρα } N(A) = 9 + 1 = 10 \text{ και } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{10}{19}.$$

Από το (Δ2) βρίσκουμε ότι $E(x)_{\min} = E(2) = 8$.

Άρα για κάθε $x \in (0,4)$ είναι $E(x) \geq 8$ και η ισότητα αληθεύει μόνο για $x = 2$.

Επομένως $E(x_i) \leq 8 \Leftrightarrow x_i = 2$.

Έτσι $N(B) = 1$ και $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{19}$.

• Είναι $\Gamma = (A \cup B)'$.

Άρα $P(\Gamma) = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B)$

Προφανώς $B \subseteq A$. Άρα $A \cup B = A$ και

$$P(\Gamma) = 1 - P(A) = 1 - \frac{10}{19} \Leftrightarrow P(\Gamma) = \frac{9}{19}.$$

Επιμέλεια: ΚΟΥΡΤΟΓΛΟΥ ΘΕΑΓΕΝΗΣ
ΠΟΡΦΥΡΑΚΗΣ ΠΟΛΥΚΑΡΠΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΦΡΟΝΤΙΣΤΕΣ
Φροντιστηριακό συγκρότημα Θεσ/νίκης «ΚΟΡΥΦΗ»