

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεωρία σχολικό σελ. 251
A2. Θεωρία σχολικό σελ. 150
A3. α. → Λάθος
β. → Σωστό
γ. → Σωστό
δ. → Σωστό
ε. → Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 4 = 0 \text{ και } 2x - 2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 2 \quad (1) \text{ και } x = 1$$

$$(1) \Rightarrow 1^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1.$$

$$\text{Άρα } z_1 = 1 + i \text{ και } z_2 = 1 - i$$

$$\text{B2. } \frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{1^2 + 1^2} = \frac{1+2i-1}{2} = i.$$

$$\text{Άρα } w = 3i^{39} = 3i^3 = -3i$$

$$\text{B3. } |u + w| = |4z_1 - z_2 - i| \Leftrightarrow |u - 3i| = |4(1+i) - (1-i) - i| \Leftrightarrow |u - 3i| = |3 + 4i + i - i| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |u - 3i| = |3 + 4i| \Leftrightarrow |u - 3i| = \sqrt{9+16} \Leftrightarrow |u - 3i| = 5 \quad K(0, 3) \text{ και } \rho = 5$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\text{Γ1. } f'(x) = 2(x-3) \cdot (x-1) + (x-3)^2 = (x-3) \cdot [2(x-1) + x-3] = (x-3) \cdot (2x-2+x-3) = (x-3) \cdot (3x-5)$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, \frac{5}{3}]$ και $[3, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο

$$\left[\frac{5}{3}, 3\right].$$

x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Γ2. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$.

$$(\varepsilon) // y = 4x + 3, \text{ άρα } \lambda_{\varepsilon} = f'(x_0) = 4 \Leftrightarrow (x_0 - 3) \cdot (3x_0 - 5) = 4 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 14x_0 + 11 = 0$$

$$\Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 11 = 196 - 132 = 64$$

$$x_0 = \frac{14 \pm 8}{6} = \begin{cases} \frac{22}{6} = \frac{11}{3} \notin \mathbb{Z} & \text{απορρίπτεται} \\ \frac{6}{6} = 1 \in \mathbb{Z} & \text{δεκτή} \end{cases}$$

$$\text{Άρα } (\varepsilon): y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y - 0 = 4 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow (\varepsilon): y = 4x - 4$$

Γ3. $g(x) = (x - 1) \cdot f(x) = (x - 1)^2 \cdot (x - 3)^2$

$$g'(x) = 2(x - 1) \cdot (x - 3)^2 + 2(x - 1)^2 \cdot (x - 3) = 2(x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - 3 + x - 1) = 2(x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (2x - 4) = 4(x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+	+	+
$x - 2$	-	-	0	+	+
$x - 3$	-	-	-	0	+
$g'(x)$	-	0	+	0	+
$g(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η $y = x - 2$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$, άρα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{ax^2 - x + 2}{x+1}}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 - x + 2}{x^2 + x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2}{x^2} = 1 \Leftrightarrow a = 1$$

Για $a = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 2}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 2 - x^2 - x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x} = -2$$

$$\text{Δ2.α. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 - x + 2}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - x + 2}{x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 2 - x^2 - x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x} = -2 = \beta$$

Άρα η $y = x - 2$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$

Δ2.β. $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{1}{x + 1} \cdot (x^2 - x + 2) \right] = +\infty$, διότι

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x + 1} = +\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 1) = 0 \text{ και } x + 1 > 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - x + 2) = 4 > 0$$

Άρα η $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_h .

Δ3. $h(x) + \frac{(x-3)^4}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} + \frac{(x-3)^4}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x^2 - x + 2) + (x+1)(x-3)^4}{x(x+1)} = 0$

Θεωρώ συνάρτηση K , με $K(x) = x(x^2 - x + 2) + (x+1)(x-3)^4$
 K συνεχής στο $[-1, 0]$ ως πολυωνυμική
 $K(1) = -4 < 0$ και
 $K(0) = (-3)^4 > 0$

Από Θ. Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον $\xi \in (-1, 0)$, τέτοιο ώστε

$$K(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{-1 < \xi < 0}{\xi(\xi+1)} K(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\xi(\xi^2 - \xi + 2) + (\xi+1)(\xi-3)^4}{\xi(\xi+1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\xi(\xi^2 - \xi + 2)}{\xi(\xi+1)} + \frac{(\xi+1)(\xi-3)^4}{\xi(\xi+1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{\xi^2 - \xi + 2}{\xi+1} + \frac{(\xi-3)^4}{\xi} = 0$$

$$h(\xi) + \frac{(\xi-3)^4}{\xi} = 0$$

Επομένως η εξίσωση $h(x) + \frac{(x-3)^4}{x} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

Επιμέλεια απαντήσεων:
 Δραγώνας Μπάμπης
 Γκιούλος Θεόδωρος
 Διονυσοπούλου Σοφία
 Μαθηματικοί
 Φροντιστήριο Μ.Ε «ΕΠΙΛΟΓΗ» - Καλαμάτα
<http://www.epil.gr>