

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄
ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 21 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 263
- A2.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 192
- A3.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 303
- A4.** α. Σωστό, β. Σωστό, γ. Λάθος, δ. Λάθος, ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

B1.1^{ος} τρόπος

$$w \in I \Leftrightarrow \bar{w} = -w \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\bar{z} - i}{2z + i} = -\frac{2z - i}{2z + i} \Leftrightarrow \frac{2\bar{z} + i}{2\bar{z} - i} = \frac{-2z + i}{2z + i} \Leftrightarrow$$

$$(2\bar{z} + i) \cdot (2z + i) = (2\bar{z} - i) \cdot (-2z + i) \Leftrightarrow$$

$$4z\bar{z} + 2\bar{z}i + 2zi - 1 = -4z\bar{z} + 2\bar{z}i + 2zi + 1 \Leftrightarrow 8z\bar{z} = 2 \Leftrightarrow$$

$$z\bar{z} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow |z|^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow |z| = \frac{1}{2}$$

Επομένως ο ζητούμενος γ.τ. είναι

ο κύκλος **C** με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}$

Εξαιρείται το σημείο $M\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ διότι $z \neq -\frac{i}{2}$

B1.2^{ος} τρόπος

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{2z - i}{2z + i} \stackrel{z = x + yi}{=} \frac{2(x + yi) - i}{2(x + yi) + i} = \frac{2x + 2yi - i}{2x + 2yi + i} \\
 &= \frac{(2x + 2yi - i) \cdot (2x - 2yi - i)}{(2x + 2yi + i) \cdot (2x - 2yi - i)} \\
 &= \frac{4x^2 - 4xyi - 2xi + 4xyi + 4y^2 - 2y - 2xi - 2y - 1}{(2x)^2 + (2y + 1)^2} \\
 &= \frac{4x^2 + 4y^2 - 1}{(2x)^2 + (2y + 1)^2} - \frac{4x}{(2x)^2 + (2y + 1)^2}i
 \end{aligned}$$

$$w \in I \Leftrightarrow \operatorname{Re}(w) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 + 4y^2 - 1}{(2x)^2 + (2y + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

Επομένως ο ζητούμενος γ.τ. είναι

ο κύκλος **C** με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}$

Εξαιρείται το σημείο $M\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ διότι $z \neq -\frac{i}{2}$

B2.1^{ος} τρόπος

$$|w| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{2z - i}{2z + i} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|2z - i|}{|2z + i|} = 1 \Leftrightarrow$$

$$|2z - i| = |2z + i| \Leftrightarrow |2z - i|^2 = |2z + i|^2 \Leftrightarrow$$

$$(2z - i)(2\bar{z} + i) = (2z + i)(2\bar{z} - i) \Leftrightarrow$$

$$4z\bar{z} + 2zi - 2\bar{z}i + 1 = 4z\bar{z} - 2zi + 2\bar{z}i + 1 \Leftrightarrow$$

$$4zi = 4\bar{z}i \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \stackrel{|z| = \frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} z = \pm \frac{1}{2}$$

B2. 2^{ος} τρόπος

$$|w| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{2z - i}{2z + i} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|2z - i|}{|2z + i|} = 1 \Leftrightarrow$$

$$|2z - i| = |2z + i| \Leftrightarrow 2 \cdot \left| z - \frac{1}{2}i \right| = 2 \cdot \left| z + \frac{1}{2}i \right| \Leftrightarrow$$

$$\left| z - \frac{1}{2}i \right| = \left| z + \frac{1}{2}i \right|$$

άρα η εικόνα του z βρίσκεται στη μεσοκάθετο του AB

με $A \left(0, \frac{1}{2} \right)$ και $B \left(0, -\frac{1}{2} \right)$,

δηλαδή τον άξονα $x'x$.

$$\text{Επομένως } z \in \mathbb{R} \stackrel{|z| = \frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} z = \pm \frac{1}{2}$$

B3. Για $z = \frac{1}{2}$ είναι :

1^{ος} τρόπος

$$w = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)^2}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

2^{ος} τρόπος

$$w = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{-i^2 - i}{1 + i} = \frac{-i \cdot \cancel{(1 + i)}}{\cancel{1 + i}} = -i$$

Για $w = -i$ έχουμε :

$$w^4 + iw^7 = (-i)^4 + i(-i)^7 = i^4 - i^8 = 1 - 1 = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}}$

Θέτω $u = \frac{\ln x}{x}$ με $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x \right) = -\infty$

διότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, άρα

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0 = f(0)$

επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Γ2. Για $x > 0$ είναι $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$

$f'(x) = \left(e^{\frac{\ln x}{x}} \right)' = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		○	-
$f(x)$			

• $\Delta_1 = [0, e]$

$\left. \begin{array}{l} \text{Η } f \text{ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο } \Delta_1 \\ \triangleright f(0) = 0 \text{ και} \\ \triangleright f(e) = e^{\frac{1}{e}}, \end{array} \right\} \Rightarrow f(\Delta_1) = \left[0, e^{\frac{1}{e}} \right]$

• $\Delta_2 = (e, +\infty)$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_2

$$\left. \begin{array}{l} \triangleright \lim_{x \rightarrow e^+} f(x) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} f(e) = e^{\frac{1}{e}} \\ \triangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \\ \text{Θέτω } u = \frac{\ln x}{x} \text{ με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \stackrel{\text{DL'H}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = 0 \\ \text{άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim_{u \rightarrow 0} e^u = e^0 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\Delta_2) = \left(1, e^{\frac{1}{e}}\right)$$

Τέλος $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \left[0, e^{\frac{1}{e}}\right]$

$$\begin{aligned} \text{Γ3. i)} f(x) = f(4) &\Leftrightarrow e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\frac{\ln 4}{4}} \stackrel{e^x \text{ "1-1"}}{\Leftrightarrow} \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 4}{4} \Leftrightarrow \\ 4 \cdot \ln x &= x \cdot \ln 4 \Leftrightarrow \ln x^4 = \ln 4^x \stackrel{\ln x \text{ "1-1"}}{\Leftrightarrow} x^4 = 4^x \end{aligned}$$

Γ3. ii) Οι εξισώσεις $f(x) = f(4)$ και $x^4 = 4^x$ είναι ισοδύναμες.

Η εξίσωση $x^4 = 4^x$ έχει προφανείς ρίζες τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$, άρα η εξίσωση $f(x) = f(4)$ έχει ρίζες τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$.

Η f είναι γν. αύξουσα στο Δ_1 , άρα η εξίσωση $f(x) = f(4)$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_1 την $x_1 = 2$.

Η f είναι γν. φθίνουσα στο Δ_2 , άρα η εξίσωση $f(x) = f(4)$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_2 την $x_2 = 4$.

Επομένως η εξίσωση $x^4 = 4^x$, $x > 0$, έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση g , με $g(x) = [f(x) - \sqrt{2}] \cdot \int_2^x f(t) dt$

- g συνεχής στο $[2, 4]$ ως πράξεις συνεχών
- g παραγωγίσιμη στο $(2, 4)$ ως πράξεις παραγωγισίμων

$$\text{με } g'(x) = f'(x) \cdot \int_2^x f(t) dt + [f(x) - \sqrt{2}] \cdot f(x)$$

$$\bullet g(2) = [f(2) - \sqrt{2}] \cdot \int_2^2 f(t) dt = 0$$

$$g(4) = [f(4) - \sqrt{2}] \cdot \int_2^4 f(t) dt = 0, \text{ διότι}$$

$$f(4) = e^{\frac{\ln 4}{4}} = e^{\frac{2 \ln 2}{4}} = e^{\frac{\ln 2}{2}} = \sqrt{e^{\ln 2}} = \sqrt{2}.$$

από Θ.Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2, 4)$,

$$\text{τέτοιο ώστε } g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) \cdot \int_2^\xi f(t) dt + [f(\xi) - \sqrt{2}] \cdot f(\xi) = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi) \cdot \int_2^\xi f(t) dt = -[f(\xi) - \sqrt{2}] \cdot f(\xi) \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi) \cdot \int_2^\xi f(t) dt = f(\xi) \cdot [\sqrt{2} - f(\xi)]$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. 1^{ος} τρόπος : Παραγωγίζουμε κατά μέλη τη σχέση

$$e^{f(x)} \cdot [f^2(x) - 2f(x) + 3] = x, \text{ για κάθε } x > 0 \quad (1) \text{ και έχουμε :}$$

$$[e^{f(x)} \cdot [f^2(x) - 2f(x) + 3]]' = (x)'$$

$$[e^{f(x)}]' \cdot [f^2(x) - 2f(x) + 3] + e^{f(x)} \cdot [f^2(x) - 2f(x) + 3]' = 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot [f^2(x) - 2f(x) + 3] + e^{f(x)} \cdot [2f(x) \cdot f'(x) - 2f'(x)] = 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot [f^2(x) - 2f(x) + 3] + e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot [2f(x) - 2] = 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot [f^2(x) - \cancel{2f(x)} + 3 + \cancel{2f(x)} - 2] = 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot [f^2(x) + 1] = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)} \cdot [f^2(x) + 1]}$$

Είναι $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$,
άρα η f είναι 1-1, άρα η f αντιστρέφεται.

Δ1. 2^{ος} τρόπος

$$e^{f(x)} \cdot [f^2(x) - 2f(x) + 3] = x, \text{ για κάθε } x > 0 \quad (1)$$

$$\text{Έστω } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \begin{cases} e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)} & (2) \\ f^2(x_1) = f^2(x_2) \\ -2f(x_1) = -2f(x_2) \end{cases}$$

$$\left. \begin{matrix} f^2(x_1) = f^2(x_2) \\ -2f(x_1) = -2f(x_2) \end{matrix} \right\} \xrightarrow{(+)} f^2(x_1) - 2f(x_1) = f^2(x_2) - 2f(x_2) \Rightarrow$$

$$f^2(x_1) - 2f(x_1) + 3 = f^2(x_2) - 2f(x_2) + 3 \quad (3)$$

$$(2), (3) \xrightarrow{(*)} e^{f(x_1)} [f^2(x_1) - 2f(x_1) + 3] = e^{f(x_2)} [f^2(x_2) - 2f(x_2) + 3]$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2$$

άρα η f είναι 1-1, άρα η f αντιστρέφεται.

Στην σχέση (1) αν θέσουμε όπου $f(x) = y$, θα έχουμε

$$e^y \cdot (y^2 - 2y + 3) = x, \text{ άρα } f^{-1}(y) = e^y \cdot (y^2 - 2y + 3) \text{ ή}$$

$$f^{-1}(x) = e^x \cdot (x^2 - 2x + 3), x \in \mathbb{R} = f(A)$$

Δ2. $f^{-1}(x) = e^x \cdot (x^2 - 2x + 3), x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(x) &= [e^x \cdot (x^2 - 2x + 3)]' = e^x \cdot (x^2 - 2x + 3) + e^x \cdot (2x - 2) \\ &= e^x \cdot (x^2 - 2x + 3 + 2x - 2) = e^x \cdot (x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f^{-1})''(x) &= [e^x \cdot (x^2 + 1)]' = e^x \cdot (x^2 + 1) + e^x \cdot 2x \\ &= e^x \cdot (x^2 + 2x + 1) = e^x \cdot (x + 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

και το "=" ισχύει μόνο για $x = -1$

Άρα η f^{-1} είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

$$f^{-1}(0) = e^0 \cdot (0^2 - 2 \cdot 0 + 3) = 3$$

$$(f^{-1})'(0) = e^0 \cdot (0^2 + 1) = 1$$

$$\varepsilon : y - f^{-1}(0) = (f^{-1})'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y - 3 = x \Leftrightarrow y = x + 3$$

η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $A(0, 3)$

Η f^{-1} είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, άρα
η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται πάνω από την (ε)
με εξαίρεση το σημείο επαφής A .

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 [f^{-1}(x) - (x + 3)] dx = \int_0^1 [e^x \cdot (x^2 - 2x + 3) - (x + 3)] dx \\ &= \int_0^1 e^x \cdot (x^2 - 2x + 3) dx - \int_0^1 (x + 3) dx \\ &= \int_0^1 (e^x)' \cdot (x^2 - 2x + 3) dx - \left[\frac{x^2}{2} + 3x \right]_0^1 \\ &= [e^x \cdot (x^2 - 2x + 3)]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot (x^2 - 2x + 3)' dx - \frac{1}{2} - 3 \\ &= 2e - 3 - \int_0^1 e^x \cdot (2x - 2) dx - \frac{1}{2} - 3 \\ &= 2e - 3 - \int_0^1 (e^x)' \cdot (2x - 2) dx - \frac{1}{2} - 3 \\ &= 2e - 3 - [e^x \cdot (2x - 2)]_0^1 + \int_0^1 e^x \cdot (2x - 2)' dx - \frac{1}{2} - 3 \\ &= 2e - 3 - 2 + 2[e^x]_0^1 - \frac{1}{2} - 3 \\ &= 2e - 3 - 2 + 2[e^x]_0^1 - \frac{1}{2} - 3 \\ &= 2e - 3 - 2 + 2e - 2 - \frac{1}{2} - 3 \\ &= \left(4e - \frac{21}{2} \right) \text{τ.μ.} \end{aligned}$$

Δ3.i) 1^{ος} τρόπος

$$\lambda_1 = (f^{-1})'(x) = e^x \cdot (x^2 + 1)$$

$$\lambda_2 = f'(f^{-1}(x)) = \frac{1}{e^{f(f^{-1}(x))} \cdot \left[(f(f^{-1}(x)))^2 + 1 \right]} = \frac{1}{e^x \cdot (x^2 + 1)}$$

$$\text{Επομένως } \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$$

2^{ος} τρόπος

Είναι $f(f^{-1}(x)) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Παραγωγίζουμε κατά μέλη και έχουμε :

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = (x)' \Leftrightarrow \lambda_2 \cdot \lambda_1 = 1$$

$$\mathbf{\Delta 3.ii) (AB) = d(x) = \sqrt{(x - f^{-1}(x))^2 + (f^{-1}(x) - x)^2} = \sqrt{2(f^{-1}(x) - x)^2}}$$

1^{ος} τρόπος

Έχουμε αποδείξει ότι $f^{-1}(x) - (x + 3) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$f^{-1}(x) - x \geq 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$

$$(AB) = d(x) = \sqrt{2(f^{-1}(x) - x)^2} = \sqrt{2} \cdot (f^{-1}(x) - x) \geq 3\sqrt{2}$$

2^{ος} τρόπος

Θεωρώ τη συνάρτηση g , με $g(x) = f^{-1}(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$

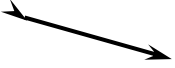
$$\text{Είναι } g'(x) = (f^{-1})'(x) - 1$$

και $g''(x) = (f^{-1})''(x) \geq 0$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = -1$

άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα και επειδή $g'(0) = 0$

η g' έχει μοναδική ρίζα το 0.

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > g'(0) \stackrel{g' \uparrow}{\Leftrightarrow} x > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	○	+
$g(x)$			

Είναι $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq 3$

$$\text{άρα } (AB) = d(x) = \sqrt{2g^2(x)} = g(x) \cdot \sqrt{2} \geq 3\sqrt{2}$$

Επομένως η απόσταση **AB** γίνεται ελάχιστη όταν $x = 0$
 και η ελάχιστη αυτή απόσταση είναι $d_{\min} = 3\sqrt{2}$

Επιμέλεια απαντήσεων: Φροντιστήρια «Κελάφας»