

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω , να αποδείξετε ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Μονάδες 7

- A2.** Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$;

Μονάδες 4

- A3.** Τι ονομάζεται (απόλυτη) συχνότητα V_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής X ;

Μονάδες 4

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων. (μονάδες 2)
- β) Σε ομαδοποιημένα δεδομένα το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι πάντοτε ίσο με ένα. (μονάδες 2)
- γ) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 . Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ είναι $f'(x_0)$ (μονάδες 2)
- δ) Το ενδεχόμενο $A - B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B (μονάδες 2)
- ε) Ο σταθμισμένος αριθμητικός μέσος ή σταθμικός μέσος είναι ένα μέτρο διασποράς. (μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Η βαθμολογία εξήντα μαθητών ενός Λυκείου σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών βρίσκεται στο διάστημα $[10, 20)$ και έχει ομαδοποιηθεί σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους. Γνωρίζουμε, επίσης, ότι έξι μαθητές έχουν πάρει βαθμό μικρότερο από 12, δεκαοκτώ μαθητές μικρότερο από 14, έξι μαθητές μεγαλύτερο ή ίσο του 18 και δεκαοκτώ μαθητές μεγαλύτερο ή ίσο του 16.

B1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων κατάλληλα συμπληρωμένο, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές x_i	Συχνότητα n_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i\%$
$[10, \cdot)$					
$[\cdot, \cdot)$					
$[\cdot, \cdot)$					
$[\cdot, \cdot)$					
$[\cdot, 20)$					
Σύνολο					

Μονάδες 12

B2. Να βρείτε τη μέση βαθμολογία $\bar{X}$ των μαθητών και τη διάμεσο δ των βαθμολογιών τους.

Μονάδες 8

B3. Στο 5% των μαθητών με την καλύτερη επίδοση πρόκειται να δοθεί έπαινος. Από ποιον βαθμό και πάνω πρέπει να έχει γράψει κάποιος μαθητής για να πάρει έπαινο; (Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες).

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $\Omega = \{-1, 0, 1, 2\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω δίνονται από τη σχέση

$$P(\kappa) = \frac{\alpha}{\kappa^2 + 1}, \quad \kappa \in \Omega, \text{ με } \alpha > 0$$

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A, B του Ω με

$$A = \{ \kappa \in \Omega / \kappa^2 > 1 \}$$

$$B = \{ \kappa \in \Omega / (\kappa^2 - 1)(\kappa^2 - 4) = 0 \}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{5}{11}$ και να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω .

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{11}$, $P(B) = \frac{6}{11}$ και να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Γ : «να πραγματοποιείται το B και όχι το A »

Δ : «να μην πραγματοποιείται το A ή να μην πραγματοποιείται το B ».

Μονάδες 10

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{3} x^3 + \frac{\kappa}{2} x^2 + \frac{9}{4} x - 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \kappa \in \Omega$$

και το ενδεχόμενο

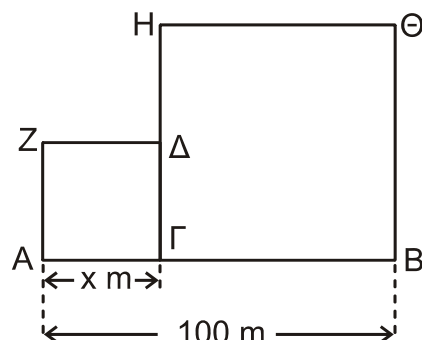
$$E = \{ \kappa \in \Omega / \text{η συνάρτηση } f \text{ να είναι γνησίως αύξουσα} \}.$$

Να εξετάσετε αν το ενδεχόμενο E είναι βέβαιο.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB με μήκος 100 m. Θεωρούμε εσωτερικό σημείο Γ του AB τέτοιο, ώστε το μήκος του τμήματος ΑΓ να είναι x m.



- Δ1.** Κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΓΔΖ και ΓΒΘΗ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

- i) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων, ως συνάρτηση του x, είναι

$$E(x) = 2x^2 - 200x + 10000, \quad x \in (0, 100)$$

(μονάδες 3)

- ii) Να βρείτε για ποια τιμή του x το εμβαδόν E(x) γίνεται ελάχιστο.

(μονάδες 5)

Μονάδες 8

Στη συνέχεια, για $x = 50$, χωρίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ σε ν διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ℓ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ με αντίστοιχα μήκη x_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Αν η μέση τιμή των μηκών x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ είναι $\bar{x} = 2$ και η τυπική τους απόκλιση είναι $s = 0,2$ τότε:

- Δ2.** Να δείξετε ότι $n = 25$

Μονάδες 5

- Δ3.** Να βρείτε τη μέση τιμή των εμβαδών των τετραγώνων που κατασκευάζονται με πλευρές τα διαδοχικά τμήματα ℓ_i με αντίστοιχα μήκη x_i , όπου $i = 1, 2, \dots, 25$

$$\text{Δίνεται ότι: } s^2 = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2}{n} \right\}$$

Μονάδες 6

- Δ4.** Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ℓ_i , $i = 1, 2, \dots, 25$
Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$$\Lambda = \{ \ell_i, i = 1, 2, \dots, 25 \text{ τέτοιο, ώστε ο δείκτης } i \text{ να είναι πολλαπλάσιο του } 3 \text{ ή πολλαπλάσιο του } 4 \}.$$

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 18.00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ