

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 21 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 , να αποδείξετε ότι

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι δύο συναρτήσεις f, g είναι ίσες;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ , όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

(μονάδες 2)

β) Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Ισχύει η ισοδυναμία

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \right)$$

(μονάδες 2)

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ'ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

- γ) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε πάντοτε ισχύει $f \circ g = g \circ f$

(μονάδες 2)

- δ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) , όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$

(μονάδες 2)

- ε) $(\eta \mu x)' = -\sigma \upsilon \nu x, \quad x \in \mathbb{R}$

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους ισχύουν:

- $w = \frac{2z - i}{2z + i}, \quad z \neq -\frac{i}{2}$
- w φανταστικός

- B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z , είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}$, εκτός από το σημείο $M\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ του κύκλου.

Μονάδες 10

- B2.** Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z , του ερωτήματος B1, να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει $|w| = 1$

Μονάδες 8

- B3.** Αν είναι $z = \frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι

$$w^4 + i w^7 = 0$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha x^3 + x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$$

- Γ1.** Να υπολογίσετε την τιμή του α , ώστε η ευθεία $\varepsilon: y = 4x - 2$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(1, f(1))$ **Μονάδες 7**

Στη συνέχεια, για $\alpha = 1$

- Γ2.** i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f (μονάδες 4)
ii) Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την παρακάτω ανίσωση (μονάδες 6)

$$f(x^3 + x) > 10$$

Μονάδες 10

- Γ3.** Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x^2 + 1} \eta \mu \frac{1}{x} \right)$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $f(x) + x f'(x) = 2x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$
- $f(1) = 10$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \frac{x^2 + 9}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

Μονάδες 6

- Δ2.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Μονάδες 6

- Δ3.** Να μελετήσετε, ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f'

Μονάδες 5

- Δ4.** Να αποδείξετε ότι

$$f(x) - 10 \leq (x - 1) f'(x), \quad \text{για κάθε } x \in [1, +\infty)$$

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 18:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ