

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεωρία σχολικό σελ. 253
A2. Θεωρία σχολικό σελ. 191
A3. Θεωρία σχολικό σελ. 258
A4. α. → Σωστό
β. → Σωστό
γ. → Λάθος
δ. → Λάθος
ε. → Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$\begin{aligned}
 |z-1|^2 + |z+1|^2 &= 4 \Leftrightarrow \overset{z=x+yi}{(x-1)^2 + \psi^2 + (x+1)^2 + \psi^2} = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (x+1)^2 + 2\psi^2 = 4 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 + 2\psi^2 = 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 2\psi^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + \psi^2 = 1
 \end{aligned}$$

B2. Είναι $|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) + |z_2|^2 = 2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) = 0$$

$$\text{Άρα } |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) + |z_2|^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{2}$$

B3. $|w - 5\overline{w}| = 12 \Rightarrow \overset{w=x+yi}{|x+yi - 5(x-yi)|} = 12 \Rightarrow |x+yi - 5x+5yi| = 12 \Rightarrow$

$$\Rightarrow |-4x + 6yi| = 12 \Rightarrow 16x^2 + 36y^2 = 144 \Rightarrow \frac{16x^2}{144} + \frac{36y^2}{144} = 1 \Rightarrow \left(\frac{4x}{12}\right)^2 + \left(\frac{6y}{12}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

B4. $\max |w| = \alpha = 3$

$$\min |w| = \beta = 2$$

$$||z| - |w|| \leq |z - w| = |z| + |w| \Leftrightarrow |1 - |w|| \leq |z - w| \leq 1 + |w| \Leftrightarrow$$

$$|w| - 1 \leq |z - w| \leq 1 + |w|$$

Επειδή $2 \leq |w| \leq 3 \Leftrightarrow 3 \leq 1 + |w| \leq 4$ οπότε $1 + |w| \leq 4$ και $1 \leq |w| - 1 \leq 2$.

Άρα $1 \leq |w| - 1 \leq |z - w| \leq 1 + |w| \leq 4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = (x-1)' \ln x + (x-1) \frac{1}{x}, x > 0$

$$= \ln x + 1 - \frac{1}{x}, x > 0$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0. \text{ Άρα το 1 μοναδική ρίζα } f'$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

Για $x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) = 0$

Για $x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) = 0$

$$f(0,1] = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [-1, +\infty)$$

$$f(1, +\infty) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-1, +\infty).$$

Άρα $f(0, +\infty) = [-1, +\infty)$

Γ2. $x^{x-1} = e^{2013} \Leftrightarrow (x-1) \ln x = 2013 \Leftrightarrow (x-1) \ln x - 1 = 2012 \Leftrightarrow f(x) = 2012$ και αφού η $2012 \in f(0,1]$ και $f \downarrow (0,1]$ άρα έχει μια ρίζα θετική στο $(0,1]$ και $2012 \in f(1, +\infty)$ και $f \uparrow$ άρα μια θετική ρίζα στο $(1, +\infty)$. Άρα έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες.

Γ3. $f(x_1) = f(x_2) \neq 2012$

Θεωρώ $g(x) = e^x \cdot f(x) - 2012e^x = e^x (f(x) - 2012)$

$$\left. \begin{aligned} g(x_1) &= e^{x_1} (f(x_1) - 2012) = 0 \\ g(x_2) &= e^{x_2} (f(x_2) - 2012) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ Rolle υπάρχει } x_0 \in (x_1, x_2) \quad \text{ τέτοιο } \quad \text{ ώστε}$$

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) = 2012$$

Γ4. Θεωρώ $g(x) = 0 \Rightarrow f(x) + 1 = 0 \Rightarrow (x-1) \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

$$\begin{aligned}
 E &= \int_1^e |g(x)| dx \quad \text{where } g(x) = f(x) + 1 \geq 0 \text{ since } f(x) \geq -1 \\
 &= \int_1^e (x-1) \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x \right)' \ln x dx \stackrel{\text{O.K.Π.}}{=} \left[\frac{e^2}{2} - e \right] - \int_1^e \left(\frac{x}{2} - 1 \right) dx = \\
 &= \frac{e^2}{2} - e - \left[\frac{x^2}{4} - x \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - e - \left(\frac{e^2}{4} - e - \frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{e^2}{2} - e - \frac{e^2}{4} + e - \frac{3}{4} = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε $h(x) = \int_1^{x^2-x+1} f(t) dt - \frac{x-x^2}{e}$. Αφού $h(x) \geq 0 \quad \forall x > 0$ και $h(1) = 0$.

Άρα $h(x) \geq h(1) \quad \forall x > 0$ και επειδή ισχύουν οι προϋποθέσεις του Fermat

$$h'(1) = 0$$

$$h'(x) = f(x^2 - x + 1)(2x - 1) - \frac{1 - 2x}{e}$$

$$h'(1) = 0 \Rightarrow f(1) - \frac{1-2}{e} = 0 \Rightarrow f(1) + \frac{1}{e} = 0 \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{e}$$

$f(x) \neq 0$ και συνεχής f σταθερό πρόσημο και $f(1) = -\frac{1}{e} < 0$. Άρα

$$f(x) < 0 \quad \forall x > 0.$$

$$\text{Από } \ln x - x = - \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right) | f(x) | \Rightarrow \ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right) f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e. \quad (1)$$

$$\text{θεωρώ } h(x) = \ln x - x, \quad x > 0$$

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

x	0	1	$+\infty$
h'		+	-
h			

$$h(x) \leq h(1) = -1 < 0$$

Άρα από (1) $h(x) = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right) f(x) \Rightarrow \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \neq 0$ άρα

$$f(x) = \frac{h(x)}{\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e} \text{ οπότε η } f \text{ παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων.}$$

Θεωρώ $\frac{\ln x - x}{f(x)} = g(x)$

Άρα $g(x) = \int_1^x g(t) dt + e \Rightarrow g'(x) = g(x) \Rightarrow g(x) = c \cdot e^x$.

Αλλά $g(1) = e \Rightarrow c \cdot e = e \Rightarrow c = 1$.

Άρα $g(x) = e^x \Rightarrow \frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Rightarrow f(x) = e^{-x} (\ln x - x)$

Δ2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x (\ln x - x) \stackrel{1(-\infty-0)}{=} -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(f(x))^2 \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x))^2 \left(\eta\mu \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)} \right) \stackrel{\frac{1}{f(x)}=h}{=} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu h - h}{h^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\cosh h - 1}{2h} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\cosh h - 1}{h} = 0$$

Δ3. F συνεχής $\Rightarrow \int_a^x f(t) dt$ παραγωγίσιμη

$F'(x) = f(x)$

$F''(x) = f'(x) = -e^{-x} (\ln x - x) + e^{-x} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = e^{-x} \left(-\ln x + x + \frac{1}{x} - 1 \right)$

$\ln x \leq x - 1 \Leftrightarrow -\ln x + x - 1 \geq 0$ και $\frac{1}{x} > 0$ και $e^{-x} > 0$.

Άρα $F''(x) > 0$ οπότε F κυρτή στο $(0, +\infty)$

Επειδή $F(x) + F(3x) > 2F(2x) \Leftrightarrow F(3x) - F(2x) > F(2x) - F(x)$ για Θ.Μ.Τ. για την F στο $[x, 2x]$ και $[2x, 3x]$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις αφού F συνεχής και παραγωγίσιμη.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x, 2x)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{x}$ και ένα

τουλάχιστον $\xi_2 \in (2x, 3x)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi_2) = \frac{F(3x) - F(2x)}{x}$

Επειδή F κυρτή άρα $F' \uparrow$ οπότε

$x < \xi_1 < 2x < \xi_2 < 3x \Leftrightarrow F'(\xi_1) < F'(\xi_2) \Leftrightarrow F(2x) - F(x) < F(3x) - F(2x) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2F(2x) < F(x) + F(3x)$

Δ4. Θεωρούμε $w(x) = 2F(x) - F(\beta) - F(3\beta)$

$w(x)$ συνεχής αφού $F(x)$ συνεχής $\forall x > 0$ άρα και στο $[\beta, 2\beta] \subseteq (0, +\infty)$

$$w(\beta) = 2F(\beta) - F(\beta) - F(3\beta) = F(\beta) - F(3\beta)$$

$$w(2\beta) = 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) < 0 \text{ από } \Delta(3)$$

$$\text{Επειδή } F'(x) = f(x) < 0 \Rightarrow F(x) \downarrow$$

$$\text{Άρα αφού } \beta < 3\beta \text{ (}\beta > 0\text{)} \Leftrightarrow$$

$$F(\beta) > F(3\beta). \text{ Άρα } w(\beta) > 0.$$

Άρα

$$\left. \begin{array}{l} w(\beta) > 0 \\ w(2\beta) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{από Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα } \xi \in (\beta, 2\beta) : w(\xi) = 0$$

Αλλά $w'(x) = 2F'(x) = 2f(x) < 0$ άρα $w(x) \downarrow$ το ξ για το οποίο $w(\xi) = 0$ είναι μοναδικό.

Επιμέλεια απαντήσεων:

Δραγώνας Μπάμπης

Γκιούλος Θεόδωρος

Διονυσοπούλου Σοφία

Μαθηματικοί

Φροντιστήριο Μ.Ε «ΕΠΙΛΟΓΗ» - Καλαμάτα

<http://www.epil.gr>