

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό σελίδα 98

A2. Σχολικό σελίδα 141

A3. Σχολικό σελίδα 246

A4. α. Σωστό, β. Σωστό, γ. Λάθος, δ. Σωστό, ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

$$\begin{aligned}
 \text{B1. } w \in I &\Leftrightarrow \bar{w} = -w \Leftrightarrow \frac{\bar{z}-1}{z+1} = -\frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow \frac{\bar{z}-1}{z+1} = \frac{1-z}{z+1} \Leftrightarrow \\
 (\bar{z}-1)(z+1) &= (1-z)(\bar{z}+1) \Leftrightarrow \cancel{z\bar{z}} + \cancel{\bar{z}} - \cancel{z} - 1 = \cancel{z} - 1 - \cancel{z\bar{z}} - \cancel{\bar{z}} \Leftrightarrow \\
 2z\bar{z} &= 2 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{B2. } |z|^2 = 1 &\Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z} \quad (1) \\
 \left(z - \frac{1}{z}\right)^4 &\stackrel{(1)}{=} (z - \bar{z})^4 = [2\operatorname{Im}(z)i]^4 = 2^4 \cdot \operatorname{Im}^4(z) \cdot i^4 \\
 &= 16 \cdot \operatorname{Im}^4(z) \cdot 1 = 16\operatorname{Im}^4(z) \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\text{B3. Ισχύουν: } \bar{z}_1 = \frac{1}{z_1} \quad (2) \text{ και } \bar{z}_2 = \frac{1}{z_2} \quad (3)$$

$$\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \stackrel{(2)}{=} \stackrel{(3)}{=} (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)(z_1 + z_2) = |z_1 + z_2|^2$$

$$\text{Είναι } |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow |z_1 + z_2| \leq 2$$

$$\text{επομένως } |z_1 + z_2|^2 \leq 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \leq 4$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\left. \begin{aligned} \Gamma 1. \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 + \alpha) = 1 + \alpha \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - \beta)^2 = (1 - \beta)^2 \\ f(1) &= (1 - \beta)^2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} f \text{ συνεχής} \\ \Rightarrow \text{στο } x_0 = 1 \end{array} (1 - \beta)^2 = 1 + \alpha \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \overset{(1-\beta)^2 \geq 0}{1 + \alpha \geq 0} \Leftrightarrow \alpha \geq -1$$

$$(1) \Rightarrow 1 - 2\beta + \beta^2 = 1 + \alpha \Leftrightarrow \beta^2 - 2\beta = \alpha \quad (2)$$

- Γ2.** • f συνεχής στο $[-1, 1)$ ως πολυωνυμική
 • f συνεχής στο $x_0 = 1$ από υπόθεση
 $\left. \begin{array}{l} \bullet f(-1) = \alpha - 1 \leq 0 \\ \bullet f(1) = (1 - \beta)^2 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-1) \cdot f(1) \leq 0$

Διακρίνουμε περιπτώσεις :

▷ Αν $f(-1) \cdot f(1) < 0$, τότε από Θ. Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 1)$

▷ Αν $f(-1) \cdot f(1) = 0$, τότε $f(-1) = 0$ ή $f(1) = 0$

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[-1, 1]$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma 3. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x^3 + \alpha) - (1 - \beta)^2}{x - 1} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{x - 1} \stackrel{\text{DL'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2}{1} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - \beta)^2 - (1 - \beta)^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x - \beta + 1 - \beta)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 2\beta + 1) = 2 - 2\beta \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} f \text{ παρ/μη} \\ \Rightarrow \text{στο } x_0 = 1 \end{array}$$

$$3 = 2 - 2\beta \Leftrightarrow 2\beta = -1 \Leftrightarrow \beta = -\frac{1}{2}$$

$$(2) \Rightarrow \overset{\beta = -\frac{1}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)} = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{4} + 1 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{5}{4}$$

Γ4. Για $\alpha = \frac{5}{4}$ και $\beta = -\frac{1}{2}$ έχουμε :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + \frac{5}{4}, & x < 1 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x < 1 \\ 2x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(\epsilon) : y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow (\epsilon) : y - \frac{9}{4} = 3 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow$$

$$(\epsilon) : y - \frac{9}{4} = 3x - 3 \Leftrightarrow (\epsilon) : y = 3x - \frac{3}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $g(x) = \frac{1}{1-x^2} \cdot f(x)$, για κάθε $x \in (-1, 1)$ (1)

$$\bullet (1) \xRightarrow{x=0} g(0) = \frac{1}{1-0^2} \cdot f(0) = f(0) = -3$$

άρα οι C_f, C_g έχουν κοινό σημείο το $A(0, -3)$

- Από την (1) προκύπτει ότι η g είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων, άρα παραγωγίζοντας την (1)

$$\text{έχουμε } g'(x) = \left[\frac{f(x)}{1-x^2} \right]' = \frac{f'(x) \cdot (1-x^2) - 2x \cdot f(x)}{(1-x^2)^2}$$

και για $x=0$ προκύπτει $g'(0) = f'(0)$

άρα οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη

στο κοινό τους σημείο $A(0, -3)$

Δ2. Θεωρούμε συνάρτηση φ , με $\varphi(x) = g(x) - \beta x + 3, x \in (-1, 1)$

Είναι $g(x) \leq \beta x - 3 \Leftrightarrow \varphi(x) \leq 0 = \varphi(0)$.

- Η φ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$
- Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ με $\varphi'(x) = g'(x) - \beta$
- Το $x_0 = 0$ είναι εσωτερικό σημείο του $(-1, 1)$

Από Θ. Fermat ισχύει ότι $\varphi'(0) = 0 \Leftrightarrow g'(0) = \beta$

Η κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο $A(0, -3)$ είναι :

$$(ε) : y - g(0) = g'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow$$

$$(ε) : y - (-3) = \beta x \Leftrightarrow$$

$$(ε) : y = \beta x - 3$$

Δ3. Η f' είναι γνησίως αύξουσα,

άρα η εξίσωση $f'(x) = \beta$ έχει μια το πολύ ρίζα στο $(-1, 1)$

Όμως $f'(0) = g'(0) = \beta$,

άρα η εξίσωση $f'(x) = \beta$ έχει μοναδική ρίζα στο $(-1, 1)$ το 0.

Δ4. Η f' είναι γνησίως αύξουσα,

άρα η f είναι κυρτή στο $(-1, 1)$

Η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της $(ε)$

με εξαίρεση το σημείο επαφής $A(0, -3)$

άρα $f(x) \geq \beta x - 3$, για κάθε $x \in (-1, 1)$.