

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
 ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
 ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
 ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολ. σελ. 260

A2. Θεωρία σχολ. σελ. 280

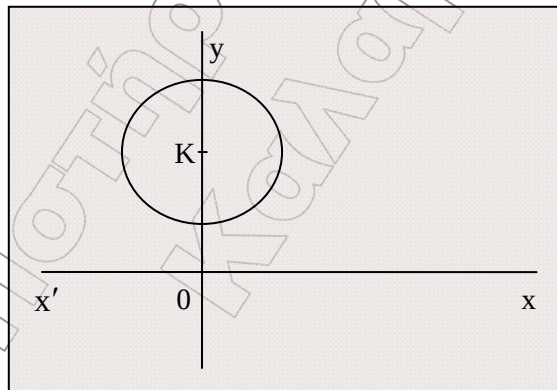
A3. α. → Σωστό, β. → Σωστό, γ. → Λάθος, δ. → Λάθος, ε. → Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. $|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \Leftrightarrow |z - 3i| + |\overline{z - 3i}| = 2 \Leftrightarrow |z - 3i| + |z - 3i| = 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2|z - 3i| = 2 \Leftrightarrow |z - 3i| = 1$ οπότε ο γ.τ. του z είναι κύκλος με $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

B2. Είναι $|z - 3i| = 1 \Leftrightarrow |z - 3i|^2 = 1 \Leftrightarrow (z - 3i)(\bar{z} + 3i) = 1 \Leftrightarrow z + 3i = \frac{1}{z - 3i}$.

B3. Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε $w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i} = z - 3i + \bar{z} + 3i = z + \bar{z} = 2x$.
 Από τον γ.τ. του z επειδή η ακτίνα είναι $\rho = 1$ συμπεραίνουμε ότι
 $-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq w \leq 2$.



B4. $|z - w| = |x + yi - 2x| = |-x + yi| = |-\bar{z}| = |z|$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x) \Leftrightarrow e^x f'(x) + e^x f''(x) - e^x = (xf'(x))' \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (e^x f'(x) - e^x)' = (xf'(x))'$ οπότε $e^x f'(x) - e^x = xf'(x) + C$ για
 $x = 0: f'(0) - 1 = C \Leftrightarrow c = -1$.

$$\text{Άρα } e^x f'(x) - e^x = x f'(x) - 1 \Leftrightarrow e^x f'(x) - x f'(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x - x) f'(x) = e^x - 1. \quad (1)$$

Εξετάζω την $e^x - x$. Έστω $h(x) = e^x - x$, $x \in \mathbb{R}$ με $h'(x) = e^x - 1$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h'	-		+
h			

Η h παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 οπότε $h(x) \geq h(0) = 1 > 0$

άρα $h(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Τότε η (1) γίνεται } f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Leftrightarrow f'(x) = (\ln(e^x - x))'$$

$$\text{οπότε } f(x) = \ln(e^x - x) + C$$

$$\text{Για } x = 0: f(0) = \ln 1 + C \Leftrightarrow f(0) = C.$$

$$\text{Άρα } f(x) = \ln(e^x - x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Γ2. Είναι $f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Το πρόσημο της f' εξαρτάται μόνο από την $e^x - 1$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-		+
f			

Η f είναι $\downarrow$ στο $(-\infty, 0]$ και $\uparrow$ στο $[0, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0 το $f(0) = \ln(e^0 - 0) = \ln 1 = 0$. Άρα $f(x) \geq 0$.

Γ3.
$$f''(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2} =$$

$$= \frac{-xe^x + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2}.$$

Το πρόσημο της f'' εξαρτάται από το $-xe^x + 2e^x - 1$.

Θεωρώ $w'(x) = -xe^x + 2e^x - 1$

$$w'(x) = -e^x - xe^x + 2e^x = e^x(1-x)$$

$$w'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
w'	+	-	
w	$\nearrow$	$\searrow$	

Στο 1 παρουσιάζει μέγιστο στο 1 το $w(1) = e - 1$.

Βρίσκω το σύνολο τιμών την $w(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} w(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-xe^x + 2e^x - 1) = 0 + 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^x + 2e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x(-x+2) - 1] = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\text{Οπότε } w(-\infty, 1] \stackrel{w \uparrow}{\underset{w \text{ συνεχής}}{=}} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} w(x), w(1) \right) = (-1, e-1]$$

$$w(1, +\infty) \stackrel{w \downarrow}{\underset{w \text{ συνεχής}}{=}} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} w(x) \right) = (-\infty, e-1)$$

Οπότε $w(x) = 0 \in w(-\infty, 1]$ οπότε υπάρχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο $(-\infty, 1]$ και επειδή $w \uparrow$ είναι μοναδική.

$w(x) = 0 \in (1, +\infty)$ οπότε υπάρχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο $(1, +\infty)$ και επειδή $w \downarrow$ είναι μοναδική.

Άρα η $w(x)$ έχει 2 ρίζες ακριβώς, μία στο $(-\infty, 1)$ και μια στο $(1, +\infty)$ οπότε

x	$-\infty$	ρ_1	1	ρ_2	$+\infty$	
w						
	-	0	+	+	0	-
f''	-	+	+	-		

Άρα η f έχει ακριβώς δύο (2) σημεία καμπής στις θέσεις ρ_1, ρ_2 .

Γ4. Θεωρώ $h(x) = f(x) - \sin x$

Τότε $h'(x) = f'(x) + \eta \mu x$

Στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f'(x) > 0$ και $\eta \mu x < 0$ οπότε $f'(x) + \eta \mu x > 0$ άρα $h'(x) > 0 \quad \forall x$ άρα $h \uparrow$.

Επειδή $h(0) = f(0) - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$

$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) > f(0) = 0$ άρα $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ οπότε $h(0)h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ και h

συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και επειδή $h \uparrow$ μοναδική.

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt \underset{\substack{x+t=u \Rightarrow t=u-x \\ dt=du \\ t=0: u=x \\ t=-x: u=0}}{=} \int_x^0 \frac{e^{2u-2x}}{g(u)} du = - \int_0^x \frac{e^{2u}}{e^{2x} g(u)} du = - \frac{1}{e^{2x}} \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du.$$

$$\text{Άρα } \frac{1-f(x)}{e^{2x}} = - \frac{1}{e^{2x}} \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow 1-f(x) = - \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-f(x) = - \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \text{ οπότε ομοίως } 1-g(x) = - \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$$

Επειδή $e^{2u}, g(u)$ συνεχής η $\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$ παραγωγίσιμη άρα η f παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων τότε

$$(1) \Rightarrow f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \text{ οπότε } f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \quad (2).$$

Επειδή $e^{2u}, f(u)$ συνεχής η $\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$ παραγωγίσιμη άρα η g παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων τότε

$$(1) \Rightarrow g(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du \text{ οπότε } g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \quad (3).$$

$$\text{Από } (2), (3) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f'(x)g(x) = e^{2x} \\ f(x)g'(x) = e^{2x} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = 0$$

Συνεπάγεται $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = c$. Όμως $f(0) = 1$ και $g(0) = 1$.

Άρα $c = 1$ και $f(x) = g(x)$.

Δ2. Επειδή $f(x) = g(x)$. Είναι $f(x)f'(x) = e^{2x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)' = \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'$

οπότε $\frac{1}{2}f^2(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + c \Leftrightarrow f^2(x) = e^{2x} + 2c$

Για $x = 0$: $f^2(0) = 1 + 2c \Leftrightarrow 1 + 1 = 2c \Leftrightarrow c = 0$.

Άρα $f^2(x) = e^{2x} \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{e^{2x}}$

οπότε $|f(x)| = \sqrt{e^{2x}}$ αλλά $f(x) > 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{e^{2x}} = e^x$.

Δ3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln e^x}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{\psi \rightarrow -\infty} \frac{1}{\psi e^\psi} = -\infty$

$\lim_{\psi \rightarrow -\infty} \psi e^\psi = \lim_{\psi \rightarrow -\infty} \frac{\psi}{e^{-\psi}} = \lim_{\psi \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-\psi}} = \lim_{\psi \rightarrow -\infty} (-e^\psi) = 0$

Δ4. $E = \int_0^1 |F(x)| dx$.

Βρίσκω πρόσημο της $F(x) = \int_1^x f(t^2) dt = \int_1^x e^{t^2} dt$ στο $[0, 1]$. Όμως

$e^{t^2} > 0 \Rightarrow \int_x^1 e^{t^2} dt \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ οπότε $\int_1^x e^{t^2} dt \leq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ άρα

$F(x) \leq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$. Οπότε

$E = \int_0^1 -F(x) dx = -\int_0^1 F(x) dx = -\int_0^1 x' F(x) dx \stackrel{\text{Ο.Κ.Π.}}{=} \left[-xF(x)\right]_0^1 + \int_0^1 xF'(x) dx =$

$= -F(1) + \int_0^1 xf(x^2) dx = -F(1) + \int_0^1 xe^{x^2} dx = \int_0^1 -F(1) + \frac{1}{2} \left[e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$.

Επιμέλεια απαντήσεων:

Δραγώνας Μπάμπης

Γκιούλος Θεόδωρος

Διονυσοπούλου Σοφία

Μαθηματικοί

Φροντιστήριο Μ.Ε «ΕΠΙΛΟΓΗ» - Καλαμάτα

<http://www.epil.gr>