

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδες 260-261

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 280

A3. α. Σωστό, β. Σωστό, γ. Λάθος,
 δ. Λάθος, ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

B1. $|z - 3i| = 1$, άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι
 κύκλος με κέντρο $K(0, 3)$ και ακτίνα $\rho = 1$

B2. $|z - 3i| = 1 \Leftrightarrow |z - 3i|^2 = 1 \Leftrightarrow (z - 3i)(\bar{z} + 3i) = 1 \Leftrightarrow$
 $\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$

B3. $w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i} = z - 3i + \frac{\bar{z} + 3i}{(z - 3i)(\bar{z} + 3i)} = z - 3i + \frac{\bar{z} + 3i}{|z - 3i|^2}$
 $= z - 3i + \bar{z} + 3i = z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$

1^{ος} τρόπος

Από το γ.τ. των εικόνων του z προκύπτει

ότι $-1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1 \Leftrightarrow$

$-2 \leq 2\operatorname{Re}(z) \leq 2 \Leftrightarrow$

$-2 \leq w \leq 2$

2^{ος} τρόπος

Από το γ.τ. των εικόνων του z έχουμε :

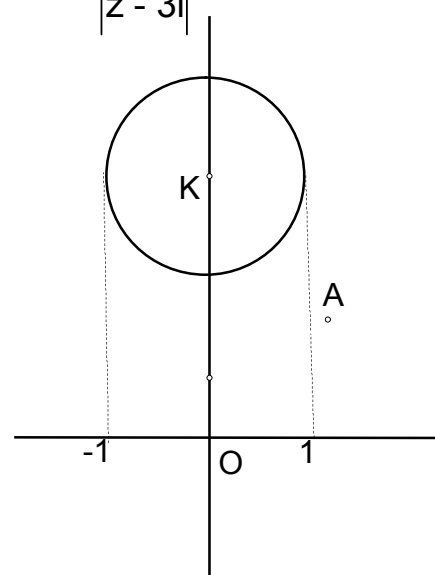
$x^2 + (y - 3)^2 = 1$

άρα $x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow$

$-2 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 2\operatorname{Re}(z) \leq 2 \Leftrightarrow$

$-2 \leq w \leq 2$

B4. $|z - w| \stackrel{z=x+yi}{\underset{w=2x}{=}} |x + yi - 2x| = |-x + yi| = |-(x - yi)| = |-\bar{z}| = |z|$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ και $f'(x) = \left(x^2 + \frac{2}{x}\right)' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2}, x \neq 0$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	-	+
$f(x)$	↘		↗	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, 0)$ και $(0, 1]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 1$, την τιμή $f(1) = 3$

Γ2. $f(2) = 5$ και $f'(2) = \frac{7}{2}$.

$$(\varepsilon) : y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 5 = \frac{7}{2}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{7}{2}x - 2$$

Γ3. • $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = +\infty,$

διότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} = +\infty$

άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$ ($y'y$)

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = +\infty,$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + \frac{2}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{2}{x^2}\right) = -\infty,$$

άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = +\infty,$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \frac{2}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{2}{x^2}\right) = +\infty,$$

άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\begin{aligned}
 \Gamma 4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - 3}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2} + 2x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + 2x^3 - 3x^2}{x^2(x^2 - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + 2x^3 - 3x^2}{x^4 - x^2} \stackrel{\text{DL'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 6x}{4x^3 - 2x} = 0
 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $g'(x) = [x \cdot f(x) + \sin x]' = f(x) + x f'(x) - \eta \mu x = 0$

άρα η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Δ2. Για $x = 0$, είναι $g(0) = 1$, άρα $g(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$x \cdot f(x) + \sin x = 1 \Leftrightarrow x \cdot f(x) = 1 - \sin x$$

Για $x \neq 0$ είναι $f(x) = \frac{1 - \sin x}{x}$.

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση h , με $h(x) = x \cdot \eta \mu x + \sin x - 1$

• Η h είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \eta \mu \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$$

$$h\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} \eta \mu \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2} - 1 = -\frac{3\pi}{2} - 1 < 0$$

Από Θ. Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση φ , με $\varphi(x) = x \cdot \eta \mu x + \sin x - 1 - \frac{2}{\pi^2} x^2$

• Η φ είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ως πράξεις συνεχών

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \eta \mu \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{1}{2} = \frac{\pi - 3}{2} > 0$$

$$\varphi(\pi) = \pi \eta \mu \pi + \sin \pi - 1 - 2 = -4 < 0$$

Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \subseteq (0, \pi)$,

$$\text{τέτοιο ώστε } \varphi(\xi) = 0 \text{ ή } \xi \cdot \eta \mu \xi + \sin \xi = 1 + \frac{2}{\pi^2} \xi^2.$$