

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 225

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 303

A3. α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Σωστό, δ. Σωστό, ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

B1. $|z - i| = 1 + \operatorname{Im}(z)$ $\stackrel{z=x+yi}{\Leftrightarrow} |x + yi - i| = 1 + y \Leftrightarrow$
 $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 1 + y \stackrel{y>-1}{\Leftrightarrow} x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2 \Leftrightarrow$
 $x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow x^2 = 4y \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x^2$

B2. $w(\bar{w} + 3i) = i(3\bar{w} + i) \Leftrightarrow w\bar{w} + 3wi = 3\bar{w}i - 1 \Leftrightarrow$
 $|w|^2 + 3(w - \bar{w})i + 1 = 0 \Leftrightarrow \stackrel{z=x+yi}{\Leftrightarrow} x^2 + y^2 + 3 \cdot 2yi \cdot i + 1 = 0 \Leftrightarrow$
 $x^2 + y^2 - 6y + 9 = 8 \Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 = 8$
 άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

κύκλος με κέντρο $K(0, 3)$ και ακτίνα $\rho = 8 = 2\sqrt{2}$

B3. Αναζητούμε τα κοινά σημεία των δύο γεωμετρικών τόπων

$$\begin{cases} x^2 = 4y & (1) \\ x^2 + y^2 - 6y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$(2) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 4y + y^2 - 6y + 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$
 $(1) \stackrel{y=1}{\Rightarrow} x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$
 Άρα **A(2, 1)** και **B(-2, 1)**.

B4. $(KA) = (KB) = \rho = 2\sqrt{2} \rightarrow \mathbf{KAB}$ ισοσκελές

$$\left. \begin{aligned} (AB)^2 &= \left(\sqrt{(2+2)^2 + (1-1)^2} \right)^2 = 16 \\ (KA)^2 + (KB)^2 &= 8 + 8 = 16 \end{aligned} \right\} \stackrel{\text{π.θ.}}{\Rightarrow} \mathbf{KAB} \text{ ορθογώνιο}$$

M μέσο του $AB \rightarrow M(0, 1)$

M μέσο του $KL \rightarrow L(0, -1) \rightarrow \mathbf{u = -i}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $x'(t) = 16 \Leftrightarrow x'(t) = (16t)', t \geq 0$

Από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $x(t) = 16t + c, t \geq 0$

Για $x = 0$ είναι $x(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$, άρα $x(t) = 16t, t \geq 0$

Γ2. Παρατήρηση: Έπρεπε να εξηγηθεί γιατί ο παρατηρητής χάνει την οπτική επαφή με το κινητό στο Α.

Έστω $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$ με $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$

Αναζητούμε την εφαπτομένη (ε) της C_f που διέρχεται από το σημείο $\Pi(0, 1)$.

(ε) : $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow$ (ε) : $y - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot (x - x_0)$

$\Pi \in C_f \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot (-x_0) \Leftrightarrow 2\sqrt{x_0} - 2x_0 = -x_0 \Leftrightarrow$

$2\sqrt{x_0} = x_0 \Leftrightarrow 4x_0 = x_0^2 \Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ ή } x_0 = 4$

Για $x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = 2 \rightarrow \mathbf{A(4, 2)}$

$x(t_0) = 4 \Leftrightarrow 16t_0 = 4 \Leftrightarrow t_0 = \frac{1}{4} \text{ min ή } t_0 = 15 \text{ sec}$

Άρα η οπτική επαφή διαρκεί **15sec**

Γ3. 1^η λύση

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(4, 2)$

είναι η (ε) : $y = \frac{1}{4}x + 1$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E = \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x + 1 - \sqrt{x} \right) dx$$

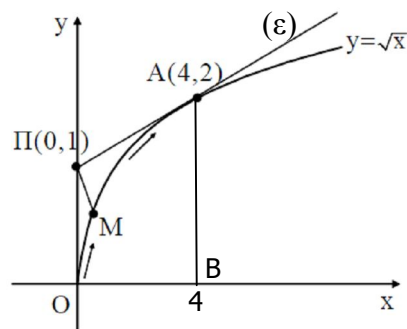
$$= \frac{1}{4} \int_0^4 x dx + \int_0^4 1 dx + \int_0^4 \sqrt{x} dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 + [x]_0^4 - \frac{2}{3} [x\sqrt{x}]_0^4 = 2 + 4 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3} \text{ m}^2$$

2^η λύση

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E = (\text{ΟΠΑΒ}) - \int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{(\text{ΟΠ}) + (\text{ΑΒ})}{2} \cdot (\text{ΟΒ}) - \frac{2}{3} [x\sqrt{x}]_0^4 = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3} \text{ m}^2$$



Γ4. 1^η λύση

$$M(x, y) \rightarrow M(x, \sqrt{x}) \rightarrow M(16t, 4\sqrt{t})$$

$$d(t) = (\Pi M) = \sqrt{(16t - 0)^2 + (4\sqrt{t} - 1)^2} = \sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}$$

$$d'(t) = \left(\sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1} \right)' = \frac{256t + 8 - \frac{2}{\sqrt{t}}}{\sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}}$$

Θεωρούμε συνάρτηση g , με $g(t) = 256t + 8 - \frac{2}{\sqrt{t}}, t > 0$

$$g'(t) = 256 + \frac{1}{t\sqrt{t}} > 0, \text{ άρα η } g \text{ είναι γν. αύξουσα στο } (0, +\infty)$$

1^{ος} τρόπος

• Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{64}, \frac{1}{4}\right]$ ως πράξεις συνεχών

• $g\left(\frac{1}{64}\right) = 4 + 8 - 16 = -4 < 0$

• $g\left(\frac{1}{4}\right) = 64 + 8 - 4 = 68 > 0$

Από Θ. Bolzano η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα t_0 στο $\left(\frac{1}{64}, \frac{1}{4}\right) \subseteq \left(0, \frac{1}{4}\right)$ και επειδή g γνησίως αύξουσα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

2^{ος} τρόπος

• Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta = \left(0, \frac{1}{4}\right]$

• $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(256t + 8 - \frac{2}{\sqrt{t}} \right) = -\infty$

• $g\left(\frac{1}{4}\right) = 64 + 8 - 4 = 68$

Άρα $g(\Delta) = (-\infty, 68]$.

Είναι $0 \in (-\infty, 68]$, άρα η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα

$t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ και επειδή g γνησίως αύξουσα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

$$d'(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(t_0) \stackrel{g \uparrow}{\Leftrightarrow} x > t_0$$

x	0	t_0	$+\infty$
$d'(x)$		○	+
$d(x)$	↘		↗

Η d είναι γν. φθίνουσα στο $(0, t_0]$ και γν. αύξουσα στο $[t_0, +\infty)$.

Η απόσταση d γίνεται ελάχιστη τη χρονική στιγμή $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$

2^η λύση

$$M(x, y) \rightarrow M(x, \sqrt{x}) \rightarrow M(16t, 4\sqrt{t})$$

$$d(t) = (\Pi M) = \sqrt{(16t - 0)^2 + (4\sqrt{t} - 1)^2} = \sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}$$

$$d'(t) = \left(\sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1} \right)' = \frac{256t + 8 - \frac{2}{\sqrt{t}}}{\sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}}$$

Είναι $d'(t) > 0$, για $t > \frac{1}{4}$, άρα η d είναι γν. αύξουσα στο $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$

Η συνάρτηση d είναι ορισμένη και συνεχής στο $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, άρα από

θεώρημα μέγιστης ελάχιστης τιμής υπάρχει $t_0 \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ τέτοιο ώστε η d να παρουσιάζει ελάχιστο στο t_0 .

- $d(0) = 1$

- $d\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{17}$

- $d\left(\frac{1}{64}\right) = \frac{\sqrt{5}}{4} < d(0) < d\left(\frac{1}{4}\right)$,

άρα η d να παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$.

Επομένως η απόσταση d γίνεται ελάχιστη τη χρονική στιγμή $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. f(0) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \frac{f(x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \cdot [1 + f(0)] = 0,$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + f(0) = 1$$

$$(\varepsilon) : y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon) : y = x$$

Δ2. Θ.Μ.Τ. με τη συνάρτηση f στο διάστημα $[0, 1]$

Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(1) - f(0) \quad (1)$$

$$\text{Είναι } f'(0) < f(1) - f(0) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f'(0) < f'(\xi) \quad (2)$$

Επίσης $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επειδή η f'' είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη, από συνέπειες Θ. Bolzano η f'' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

1^{ος} τρόπος Η f' είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

Είναι $0 < \xi$ και $f'(0) < f'(\xi)$ από (2)

Επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

2^{ος} τρόπος Θ.Μ.Τ. με τη συνάρτηση f' στο διάστημα $[0, \xi]$

Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (0, \xi)$, τέτοιο ώστε

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(\xi) - f'(0)}{\xi - 0} > 0, \text{ από (2)}$$

Επομένως είναι $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

Άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Δ3. 1^η λύση

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $O(0, 0)$ είναι η $(\varepsilon) : y = x$.

Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την

(ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής $O(0, 0)$

$f(x) \geq x \Leftrightarrow f(x) - x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0$ και το "=" ισχύει για $x = 0$.

Άρα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο την τιμή $g(0) = 0$.

2^η λύση

Είναι $g(x) = f(x) - x, x \in \mathbb{R}$.

$g'(x) = f'(x) - 1, x \in \mathbb{R}$.

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0)$

και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα θα είναι $x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$\circ$	$+$
$g(x)$	↘		↗

Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο την τιμή $g(0) = f(0) = 0$.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x \cdot g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\eta \mu x}{x} \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = +\infty, \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0, \text{ με } g(x) \geq 0.$$

Δ4. Είναι $g(x) \geq 0$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα

$$\int_0^2 g(x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^2 [f(x) - x] dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 x dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f(x) dx > \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx > 2$$

Δ5. Είναι $g(x) \geq 0$, άρα $E = \int_0^1 g(x) dx = e - \frac{5}{2} \Rightarrow$

$$\int_0^1 [f(x) - x] dx = e - \frac{5}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 x dx = e - \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2} = e - \frac{5}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = e - 2 \quad (1)$$

Θεωρούμε συνάρτηση h , με $h(x) = \int_0^x f(t) dt - 2, x \in [1, 2]$

• Η h είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πράξεις συνεχών

• $h(1) = \int_0^1 f(t) dt - 2 \stackrel{(1)}{=} e - 2 - 2 = e - 4 < 0$

$h(2) = \int_0^2 f(t) dt - 2 > 0$ από Δ4

Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$

τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0 \Leftrightarrow \int_0^\xi f(t) dt - 2 = 0 \Leftrightarrow \int_0^\xi f(t) dt = 2.$