

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1. Εξετασθή βάρβαρ ὑπὸ αὐτῶν 151

A2. Εξετασθή βάρβαρ ὑπὸ αὐτῶν 149

A3. Εξετασθή βάρβαρ ὑπὸ αὐτῶν 22

A4. α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Σωστό, δ. Λάθος, ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

B1. $\theta'(t) = (t - 4\sqrt{t} + \alpha)' = 1 - 4 \frac{1}{2\sqrt{t}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t} - 2}{\sqrt{t}}, t \in (0, 24]$

• $\theta'(t) < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{t} - 2}{\sqrt{t}} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{t} - 2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{t} < 2 \Leftrightarrow t < 4$

άρα η θεροκρασία μειώνεται για $t \in (0, 4]$

• $\theta'(t) > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{t} - 2}{\sqrt{t}} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{t} - 2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{t} > 2 \Leftrightarrow t > 4$

άρα η θεροκρασία αυξάνεται για $t \in (4, 24]$

B2. $\theta_{\min} = \theta(4) \Leftrightarrow -1 = \alpha - 4 \Leftrightarrow \alpha = 3$

B3. $\theta(t) = 0 \Leftrightarrow t - 4\sqrt{t} + 3 = 0 \xrightarrow{\sqrt{t}=x} x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$

• $x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{t} = 1 \Leftrightarrow t = 1 \rightarrow 01:00$

• $x = 3 \Leftrightarrow \sqrt{t} = 3 \Leftrightarrow t = 9 \rightarrow 09:00$

B4. $\lim_{t \rightarrow 4} \frac{\theta'(t)}{t^2 - 16} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{\frac{\sqrt{t} - 2}{\sqrt{t}}}{t^2 - 16} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{\sqrt{t} - 2}{\sqrt{t} \cdot (t^2 - 16)} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{t} - 2)(\sqrt{t} + 2)}{\sqrt{t}(t - 4)(t + 4)(\sqrt{t} + 2)}$

$= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{\cancel{t - 4}}{\sqrt{t}(t - 4)(t + 4)(\sqrt{t} + 2)} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{t}(t + 4)(\sqrt{t} + 2)} = \frac{1}{64}$

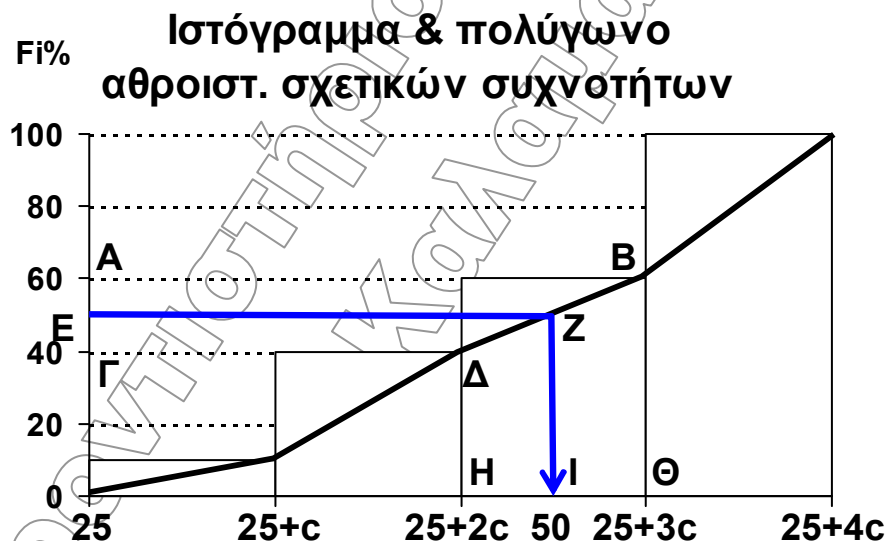
ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\sum f_i\% = 100\% \Leftrightarrow x + x + 20 + 2x + x^2 - 6x = 100 \Leftrightarrow$
 $x^2 - 2x - 80 = 0 \Leftrightarrow x = 10 \text{ ή } x = -8 \text{ (απορρίπτεται)}$
 $f_1\% = 10\%, f_2\% = 30\%, f_3\% = 20\% \text{ και } f_4\% = 40\%.$

Γ2.

Κλάσεις	$f_i\%$	$F_i\%$
$[25, 25+c)$	10	10
$[25+c, 25+2c)$	30	40
$[25+2c, 25+3c)$	20	60
$[25+3c, 25+4c)$	40	100
ΣΥΝΟΛΑ	100	-

Κατασκευάζουμε ιστόγραμμα και πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων



Το Ε είναι το μέσο του ΑΓ και η ΕΖ είναι μεσοπαράλληλη των ΑΒ και ΓΔ, άρα το Ζ είναι το μέσο του ΔΒ και η ΖΙ είναι μεσοπαράλληλη των ΔΗ και ΒΔ, άρα το Ι είναι μέσο του ΗΘ.

$$\begin{aligned}
 \frac{(25 + 2c) + (25 + 3c)}{2} &= 50 \Leftrightarrow \frac{25 + 2c + 25 + 3c}{2} = 50 \Leftrightarrow \\
 50 + 5c &= 100 \Leftrightarrow 5c = 50 \Leftrightarrow c = 10
 \end{aligned}$$

Γ3.

Κλάσεις	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	$x_i \cdot v_i$
[25 , 35)	30	5	10	5	10	150
[35 , 45)	40	15	30	20	40	600
[45, 55)	50	10	20	30	60	500
[55 , 65)	60	20	40	50	100	1200
ΣΥΝΟΛΑ	-	50	100	-	-	2450

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{2450}{50} = 49$$

Η μέση τιμή των ηλικιών είναι **49** χρόνια.

Γ4. Έστω ότι προσλαμβάνονται x άτομα που ανήκουν στην 1^η κλάση
Ο πίνακας τότε διαμορφώνεται ως εξής:

Κλάσεις	x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$
[25 , 35)	30	$5 + x$	$150 + 30x$
[35 , 45)	40	15	600
[45, 55)	50	10	500
[55 , 65)	60	20	1200
ΣΥΝΟΛΑ	-	$50 + x$	$2450 + 30x$

$$\bar{x}' = \frac{\sum x_i v_i'}{v'} \Leftrightarrow 40 = \frac{2450 + 30x}{50 + x} \Leftrightarrow$$

$$40(50 + x) = 2450 + 30x \Leftrightarrow$$

$$2000 + 40x = 2450 + 30x \Leftrightarrow$$

$$40x - 30x = 2450 - 2000 \Leftrightarrow$$

$$10x = 450 \Leftrightarrow x = 45$$

Άρα για να γίνει η μέση ηλικία 40 χρόνια, **πρέπει να προσληφθούν 45 άτομα που ανήκουν στην πρώτη κλάση.**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. • $P((A - B) \cup (B - A)) = \frac{\lambda + 1}{3\lambda}$

• $P((A \cap B)') = \frac{3\lambda - 1}{3\lambda} \Leftrightarrow P(A \cap B) = 1 - \frac{3\lambda - 1}{3\lambda} = \frac{1}{3\lambda}$

• $P((A \cup B)') = \frac{1}{\lambda - 2} \Leftrightarrow P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{\lambda - 2} = \frac{\lambda - 3}{\lambda - 2}$

• $P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) \Leftrightarrow$
 $P((A - B) \cup (B - A)) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$
 $P((A - B) \cup (B - A)) = P(A \cup B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$
 $\frac{\lambda + 1}{3\lambda} = \frac{\lambda - 3}{\lambda - 2} - \frac{1}{3\lambda} \Leftrightarrow \frac{\lambda + 2}{3\lambda} = \frac{\lambda - 3}{\lambda - 2} \Leftrightarrow$

$3\lambda^2 - 9\lambda = \lambda^2 - 4 \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 9\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \text{ ή } \lambda = \frac{1}{2}$

Για $\lambda = \frac{1}{2}$, είναι $P((A \cup B)') < 0 \rightarrow$ άτοπο

Άρα $\lambda = 4$.

Δ2. α. Για $\lambda = 4$, είναι $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$

• $N(A) = N(B) - 50 \quad (1)$

• $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{N(A)}{600} + \frac{N(B)}{600} - \frac{1}{12} \Leftrightarrow$

$300 = N(A) + N(B) - 50 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 300 = N(B) - 50 + N(B) - 50 \Leftrightarrow$

$2N(B) = 400 \Leftrightarrow N(B) = 200 \text{ και } P(B) = \frac{200}{600} = \frac{1}{3}$

• $(1) \stackrel{N(B)=200}{\Rightarrow} N(A) = 150 \text{ και } P(A) = \frac{150}{600} = \frac{1}{4}$

$$\bullet P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{N(A - B)}{600} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow$$

$N(A - B) = 100$, άρα

100 κρίθηκαν κατάλληλοι μόνο από την εταιρεία Α

$$\bullet P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{N(B - A)}{600} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$N(B - A) = 150$, άρα

150 κρίθηκαν κατάλληλοι μόνο από την εταιρεία Β

$$\bullet P(A \cap B) = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{N(A \cap B)}{600} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow N(A \cap B) = 50, \text{ άρα}$$

50 κρίθηκαν κατάλληλοι και από τις δύο εταιρείες και θα βρεθούν στο δίλημμα να επιλέξουν σε ποιά από τις δύο εταιρείες επιθυμούν να προσληφθούν

$$\beta. P(A \cup B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{N(A \cup B)}{600} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow N(A \cup B) = 300, \text{ άρα}$$

300 κρίθηκαν κατάλληλοι να προσληφθούν από τις εταιρείες Α ή Β

$$\Delta 3. P(A \cup B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P((A \cup B)') = \frac{1}{2} \Leftrightarrow N((A \cup B)') = 300,$$

άρα 300 απόφοιτοι κρίθηκαν ακατάλληλοι από τις εταιρείες Α και Β.

Γ : Ο απόφοιτος που κρίθηκε ακατάλληλος βρίσκει εργασία

$$P(\Gamma) = 2 \cdot P(\Gamma') \Leftrightarrow P(\Gamma) = 2 \cdot [1 - P(\Gamma)] \Leftrightarrow$$

$$P(\Gamma) = 2 - 2P(\Gamma) \Leftrightarrow 3P(\Gamma) = 2 \Leftrightarrow P(\Gamma) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{N(\Gamma)}{N((A \cup B)')} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{N(\Gamma)}{300} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow N(\Gamma) = 200, \text{ άρα}$$

200 από αυτούς που κρίθηκαν ακατάλληλοι και από τις δύο εταιρείες θα βρουν εργασία.

Παρατήρηση : Έπρεπε να δοθεί ότι όλοι όσοι παρακολούθησαν το πρόγραμμα θα βρουν εργασία και όσοι δεν παρακολουθήσουν το πρόγραμμα δεν θα βρουν.