

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $x'(t) = 16 \Leftrightarrow x'(t) = (16t)', t \geq 0$

Από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $x(t) = 16t + c, t \geq 0$

Για $x = 0$ είναι $x(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$, άρα $x(t) = 16t, t \geq 0$

Γ2. Παρατήρηση: Έπρεπε να εξηγηθεί γιατί ο παρατηρητής χάνει την οπτική επαφή με το κινητό στο Α.

Έστω $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$, με $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$

(ε) : η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το $\Pi(0, 1)$.

$$(ε) : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow (ε) : y - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot (x - x_0)$$

$$\Pi \in C_f \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot (-x_0) \Leftrightarrow 2\sqrt{x_0} - 2x_0 = -x_0 \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x_0} = x_0 \Leftrightarrow 4x_0 = x_0^2 \Leftrightarrow x_0 \neq 0 \text{ ή } x_0 = 4$$

$$\text{Για } x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = 2 \rightarrow \mathbf{A(4, 2)}$$

$$x(t_0) = 4 \Leftrightarrow 16t_0 = 4 \Leftrightarrow t_0 = \frac{1}{4} \text{ min ή } t_0 = 15 \text{ sec}$$

Επομένως η οπτική επαφή διαρκεί 15 δευτερόλεπτα

Γ3. $y(t) = \sqrt{x(t)}$, άρα $y'(t) = (\sqrt{x(t)})' = \frac{x'(t)}{2\sqrt{x(t)}} = \frac{16}{2\sqrt{16t}} = \frac{2}{\sqrt{t}}$

$$y'(t_0) = 4 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{t_0}} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{t_0} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t_0 = \frac{1}{4}$$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι 4 m/min

τη χρονική στιγμή $t_0 = \frac{1}{4} \text{ min ή } t_0 = 15 \text{ sec}$.

Γ4. $M(x, y) \rightarrow M(x, \sqrt{x}) \rightarrow M(16t, 4\sqrt{t})$

$$d(t) = (PM) = \sqrt{(16t - 0)^2 + (4\sqrt{t} - 1)^2} = \sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}$$

$$d'(t) = \left(\sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1} \right)' = \frac{256t + 8 - \frac{2}{\sqrt{t}}}{\sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}}$$

Θεωρούμε συνάρτηση g , με $g(t) = 256t + 8 - \frac{2}{\sqrt{t}}, t > 0$

$g'(t) = 256 + \frac{1}{t\sqrt{t}} > 0$, άρα η g είναι γν.αύξουσα στο $(0, +\infty)$

1^{ος} τρόπος

• Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{64}, \frac{1}{4}\right]$ ως πράξεις συνεχών

• $g\left(\frac{1}{64}\right) = 4 + 8 - 16 = -4 < 0$

• $g\left(\frac{1}{4}\right) = 64 + 8 - 4 = 68 > 0$

Από Θ. Bolzano η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα t_0 στο $\left(\frac{1}{64}, \frac{1}{4}\right) \subseteq \left(0, \frac{1}{4}\right)$ και επειδή g γνησίως αύξουσα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

2^{ος} τρόπος

• Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta = \left(0, \frac{1}{4}\right]$

• $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(256t + 8 - \frac{2}{\sqrt{t}}\right) = -\infty$

• $g\left(\frac{1}{4}\right) = 64 + 8 - 4 = 68$

Άρα $g(\Delta) = (-\infty, 68]$.

Είναι $0 \in (-\infty, 68]$, άρα η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$

και επειδή g γνησίως αύξουσα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

$$d'(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(t_0) \stackrel{g \uparrow}{\Leftrightarrow} x > t_0$$

x	0	t_0	$+\infty$
$d'(x)$		○	+
$d(x)$	↘		↗

Η d είναι γν.φθίνουσα στο $(0, t_0]$ και γν.αύξουσα στο $[t_0, +\infty)$.

Η απόσταση d γίνεται ελάχιστη τη χρονική στιγμή $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. f'(x) = \left(\frac{\alpha}{x^2} - \frac{1}{x - \beta} \right)' = -\frac{2\alpha}{x^3} + \frac{1}{(x - \beta)^2}$$

$$A\left(-2, \frac{5}{12}\right) \in C_f \Leftrightarrow f(-2) = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{\beta + 2} = \frac{5}{12} \quad (1)$$

$$f'(-2) = \frac{5}{18} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{(\beta + 2)^2} = \frac{5}{18} \quad (2)$$

Από (1) και (2) με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε :

$$\frac{1}{(\beta + 2)^2} - \frac{1}{\beta + 2} = -\frac{5}{36}$$

$$\text{Θέτουμε όπου } \frac{1}{\beta + 2} = \omega \rightarrow \omega^2 - \omega + \frac{5}{36} = 0$$

$$\Delta = \frac{4}{9} \text{ και ρίζες } \omega_1 = \frac{5}{6} \text{ και } \omega_2 = \frac{1}{6}$$

$$\bullet \omega_1 = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta + 2} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \beta + 2 = \frac{6}{5} \Leftrightarrow \beta = -\frac{4}{5} \notin \mathbb{Z}$$

$$\bullet \omega_2 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta + 2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \beta + 2 = 6 \Leftrightarrow \beta = 4 \in \mathbb{Z}$$

$$(1) \stackrel{\beta=4}{\Rightarrow} \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow 3\alpha + 2 = 5 \Leftrightarrow 3\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

$$\Delta 2. f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x - 4}, x \in \mathbb{R} - \{0, 4\}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{(x - 4)^2}, x \in \mathbb{R} - \{0, 4\}$$

Για $x \neq 0$ και $x \neq 4$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} = \frac{1}{(x - 4)^2} \Leftrightarrow x^3 = 2(x - 4)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^3 = 2(x^2 - 4x + 16) \Leftrightarrow$$

$$x^3 = 2x^2 - 8x + 32 \Leftrightarrow$$

$$x^3 - 2x^2 + 8x - 32 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 2)(x^2 + 16) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 2$$

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
f'(x)	+		-	+	+
f					

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 0)$, $[2, 4)$ και $(4, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 2]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο την τιμή $f(2) = \frac{3}{4}$.

Δ3. • $\Delta_1 = (-\infty, 0)$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_1

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4} \right) = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(\Delta_1) = (0, +\infty)$$

• $\Delta_2 = (0, 2]$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_2

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4} \right) = +\infty \\ f(2) &= \frac{3}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(\Delta_2) = \left[\frac{3}{4}, +\infty \right)$$

• $\Delta_3 = (2, 4)$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_3

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &\stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} f(2) = \frac{3}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4} \right) = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(\Delta_3) = \left(\frac{3}{4}, +\infty \right)$$

• $\Delta_4 = (4, +\infty)$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_4

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4} \right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(\Delta_4) = (-\infty, 0)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι :

$$f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) \cup f(\Delta_4) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \text{ ή } \mathbb{R}^*.$$

Δ4. Εξίσωση : $kx^3 + (1 - 4k)x^2 - x + 4 = 0$ (1).

- Η (1) για $x = 0$ δίνει $4 = 0 \rightarrow$ άτοπο
- Η (1) για $x = 4$ δίνει $16 = 0 \rightarrow$ άτοπο

Άρα για $x \neq 0$ και $x \neq 4$ η (1) γίνεται

$$kx^3 + (1 - 4k)x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$kx^3 + x^2 - 4kx^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$kx^3 - 4kx^2 = x - 4 - x^2 \Leftrightarrow$$

$$kx^2(x - 4) = x - 4 - x^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{kx^2(x - 4)}{x^2(x - 4)} = \frac{x - 4}{x^2(x - 4)} - \frac{x^2}{x^2(x - 4)} \Leftrightarrow$$

$$k = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x - 4} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = k$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις

$k < 0$	$k \notin f(\Delta_1)$	$k \notin f(\Delta_2)$	$k \notin f(\Delta_3)$	$k \in f(\Delta_4)$	1 ρίζα
$k = 0$	$k \notin f(\Delta_1)$	$k \notin f(\Delta_2)$	$k \notin f(\Delta_3)$	$k \notin f(\Delta_4)$	0 ρίζες
$0 < k < \frac{3}{4}$	$k \in f(\Delta_1)$	$k \notin f(\Delta_2)$	$k \notin f(\Delta_3)$	$k \notin f(\Delta_4)$	1 ρίζα
$k = \frac{3}{4}$	$k \in f(\Delta_1)$	$k \in f(\Delta_2)$	$k \notin f(\Delta_3)$	$k \notin f(\Delta_4)$	2 ρίζες
$k > \frac{3}{4}$	$k \in f(\Delta_1)$	$k \in f(\Delta_2)$	$k \in f(\Delta_3)$	$k \notin f(\Delta_4)$	3 ρίζες

Επομένως το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) είναι

$$L = \begin{cases} 0, \text{ αν } k = 0 \\ 1, \text{ αν } k \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{3}{4}\right) \\ 2, \text{ αν } k = \frac{3}{4} \\ 3, \text{ αν } k \in \left(\frac{3}{4}, +\infty\right) \end{cases}$$