

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέμα Α

A1. Σχολικό σελ. 304

A2. Σχολικό σελ. 279

A3. Σχολικό σελ. 273

A4. α. → Σωστό, β. → Σωστό, γ. → Λάθος, δ. → Λάθος, ε. → Σωστό

Θέμα Β

B1. $z + \frac{2}{z} = 2 \Leftrightarrow z^2 + 2 = 2z \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 < 0$$

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i. \text{ Άρα } z_1 = 1 + i \text{ και } z_2 = 1 - i$$

B2. $z_1^{2010} + z_2^{2010} = \left[(1+i)^2 \right]^{1005} + \left[(1-i)^2 \right]^{1005}$
 $= (1+2i-1)^{1005} + (1-2i-1)^{1005}$
 $= (2i)^{1005} + (-2i)^{1005}$
 $= (2i)^{1005} - (2i)^{1005} = 0$

B3. $|w - 4 + 3i| = |1 + i - 1 + i|$

$$|w - 4 + 3i| = |2i|$$

$$|w - (4 - 3i)| = 2$$

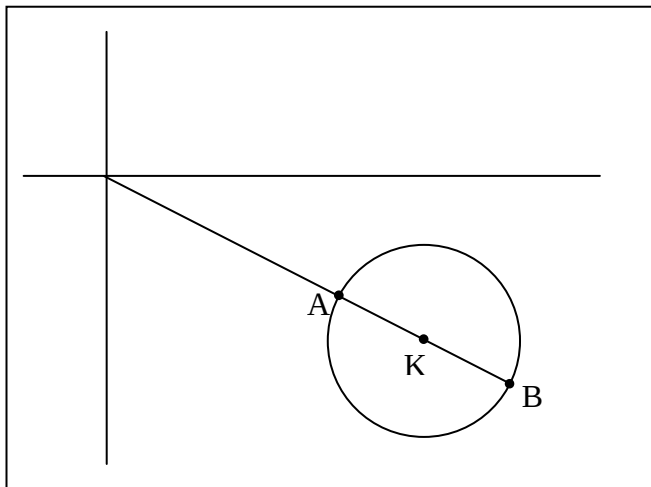
Κύκλος $k(4, -3)$ και $p=2$ $c: (x-4)^2 + (y+3)^2 = 4.$

B4. Το $|w|$ = απόσταση $M(w)$ από $O(0,0)$. Το μέτρο του $|w|$ γίνεται μέγιστο – ελάχιστο όταν η εικόνα του θα ταυτιστεί με τα σημεία τομής της διακέντρου ΟΚ με τον κύκλο.

Άρα $\max |w| = (OB) = (OK) + (KB) = (OK) + p = 5 + 2 = 7$ όπου

$$(OK) = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$\min |w| = (OA) = (OK) - (KA) = 5 - 2 = 3.$ Άρα $3 \leq |w| \leq 7.$



2ος τρόπος

$|w| = |(w - 4 + 3i) + 4 - 3i|$ και από τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\|w - 4 + 3i\| - \|4 - 3i\| \leq \|(w - 4 + 3i) + 4 - 3i\| \leq \|w - 4 + 3i\| + \|4 - 3i\|$$

$$|2 - 5| \leq |w| \leq 2 + 5 \Leftrightarrow 3 \leq |w| \leq 7.$$

Θέμα Γ

Γ1. $f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2 + 1}(x^2 + 1)' = 2 + \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 2 + 2x}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1}.$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0 \text{ αδύνατη με } \Delta = 1 - 4 = -3 < 0.$$

Άρα $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ δηλαδή $f \uparrow$

Γ2. $2(x^2 - 3x + 2) = \ln[(3x - 2)^2 + 1] - \ln(x^4 + 1) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2x^2 + \ln(x^4 + 1) = 2(3x - 2) + \ln[(3x - 2)^2 + 1] \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f(x^2) = f(3x - 2)$
 $\xrightarrow{f \uparrow \Rightarrow f^{1-1}} x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2$

Γ3. $f''(x) = \frac{(4x + 2)(x^2 + 1) - (2x^2 + 2x + 2)(2x)}{(x^2 + 1)^2} =$
 $= \frac{\cancel{4x^3} + 4x + 2x^2 + 2 - \cancel{4x^3} - 4x^2 - \cancel{4x}}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(-x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2}$
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f''	$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$		

Τα σημεία καμπής είναι $(-1, f(-1)) = (-1, -2 + \ln 2)$ και $(1, f(1)) = (1, 2 + \ln 2)$

$$\varepsilon_1: \psi - f(-1) = f'(-1)(x+1)$$

$$\psi - (-2 + \ln 2) = 1(x+1)$$

$$\psi = x - 1 + \ln 2$$

$$\varepsilon_2: \psi - f(1) = f'(1)(x-1)$$

$$\psi - (2 + \ln 2) = 3(x-1)$$

$$\psi = 3x + 2 + \ln 2 - 3$$

$$\psi = 3x + \ln 2 - 1$$

$$\varepsilon_1 \begin{cases} \psi = x - 1 + \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \ln 2 - 1 = -1 + \ln 2 + x \\ \psi = x - 1 + \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ \psi = x - 1 + \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \psi = -1 + \ln 2 \end{cases}$$

Άρα $(0, -1 + \ln 2)$

$$\text{Γ4. } I = \int_{-1}^1 2x^2 dx + \int_{-1}^1 x \cdot \ln(x^2 + 1) dx \quad (1)$$

$$\text{Το } \int_{-1}^1 2x^2 dx = \left[\frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Το } \int_{-1}^1 x \ln(x^2 + 1) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \ln u du = 0$$

$x^2 + 1 = u$
 $2x dx = du$
 $x = -1 \Rightarrow u = 2$
 $x = 1 \Rightarrow u = 2$

$$\text{Άρα η (1)} = \frac{4}{3} + 0 = \frac{4}{3}$$

Θέμα Δ

Δ1. Επειδή $f(t) - t \neq 0 \quad \forall t$ στο $\mathbb{R}$ και f συνεχής, συνεπάγεται $\frac{t}{f(t) - t}$ συνεχής ως

αποτέλεσμα πράξεων συνεχών. Το $\int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι

παραγωγίσιμη αφού $\frac{t}{f(t) - t}$ συνεχής.

$$f'(x) - 1 = \frac{x}{f(x) - x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x}{f(x) - x} + 1 = \frac{f(x) - x + x}{f(x) - x} = \frac{f(x)}{f(x) - x}$$

Δ2. $g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x) = 2f'(x)(f(x) - x) - 2f(x) =$
 $\stackrel{(\Delta_1)}{=} 2 \cdot f(x) - 2f(x) = 0 \Rightarrow g \text{ σταθερή } g(x) = c.$

Δ3. $g(x) = c \text{ και } g(0) = (f(0))^2 \text{ αλλά } f(0) - 0 = 3 \Leftrightarrow f(0) = 3.$

Άρα

$$g(0) = 9 \Leftrightarrow c = 9.$$

$$g(x) = 9 \Leftrightarrow (f(x))^2 - 2xf(x) = 9 \Leftrightarrow (f(x))^2 - 2xf(x) + x^2 = 9 + x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow \sqrt{(f(x) - x)^2} = \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow |f(x) - x| = \sqrt{x^2 + 9} \quad (1)$$

Αλλά $f(x) - x \neq 0$ και η $h(x) = f(x) - x$ συνεχής $h(x) = f(x) - x$ έχει σταθερό πρόσημο με $h(0) = f(0) = 3$. Άρα $h(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - x > 0$. Άρα από την (1) $\Rightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$.

Δ4. Θεωρώ $w(x) = \int_0^x f(t)dt$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αφού η f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$.

$$\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt \Leftrightarrow \int_x^0 f(t)dt + \int_0^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^0 f(t)dt + \int_0^{x+2} f(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w(x+1) - w(x) < w(x+2) - w(x+1)$$

Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. για την w στα $[x, x+1], [x+1, x+2]$

- w συνεχής στα $[x, x+1], [x+1, x+2]$

- w παραγωγίσιμη $(x, x+1), (x+1, x+2)$

Τότε υπάρχει $\xi_1 \in (x, x+1): w'(\xi_1) = \frac{w(x+1) - w(x)}{x+1 - x} = w(x+1) - w(x)$

Και υπάρχει $\xi_2 \in (x+1, x+2): w'(\xi_2) = \frac{w(x+2) - w(x+1)}{x+2 - x-1} = w(x+2) - w(x+1)$

Είναι $w'(x) = f(x)$

$$w''(x) = f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{\sqrt{x^2 + 9} + x}{\sqrt{x^2 + 9}} > 0$$

Όπου $\sqrt{x^2 + 9} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$. Άρα $\sqrt{x^2 + 9} + x > 0$.

Άρα $w' \uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

Όμως $\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow w'(\xi_1) < w'(\xi_2) \Leftrightarrow w(x+1) - w(x) < w(x+2) - w(x+1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt.$$

Επιμέλεια απαντήσεων:
Δραγώνας Μπάμπης
Γκιούλος Θεόδωρος
Μαθηματικοί
Φροντιστήριο Μ.Ε «ΕΠΛΟΓΗ» - Καλαμάτα
<http://www.epil.gr>