

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 225

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 222

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 150

**A4. α. Λάθος, β. Λάθος, γ. Σωστό,
 δ. Σωστό, ε. Σωστό.**

ΘΕΜΑ Β

B1. Τα z_1, z_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $z^2 - Sz + P = 0$,
με $S = z_1 + z_2 = -2$ και $P = z_1 \cdot z_2 = 5$
Η εξίσωση $z^2 + 2z + 5 = 0$ έχει διακρίνουσα -16
και ρίζες $z_1 = -1 + 2i$ και $z_2 = -1 - 2i$.

B2. $|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} w = x + yi \\ |x + yi + 1 - 2i|^2 + |x + yi + 1 + 2i|^2 = |-1 + 2i + 1 + 2i|^2 \end{matrix} \Leftrightarrow$
 $\left(\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2}\right)^2 = |4i|^2 \Leftrightarrow$
 $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 4^2 \Leftrightarrow$
 $2x^2 + 2y^2 + 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$
 $(x+1)^2 + y^2 = 4$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του w είναι ο κύκλος C με κέντρο $K(-1, 0)$, ακτίνα $\rho = 2$ και εξίσωση $(x+1)^2 + y^2 = 4$.

B3. Είναι $2\operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow 2x + y = 0 \Leftrightarrow y = -2x \quad (1)$

$$(x+1)^2 + y^2 = 4 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x^2 + 2x + 1 + (-2x)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$5x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = \frac{3}{5}.$$

• Για $x = -1$ από την (1) προκύπτει $y = 2$, άρα $w = -1 + 2i = z_1$

• Για $x = \frac{3}{5}$ από την (1) προκύπτει $y = -\frac{6}{5}$, άρα $w = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$

B4. Αν A, B είναι οι εικόνες των w_1 και w_2 αντίστοιχα, τότε

$$|w_1 - w_2| = (AB) = \text{μήκος χορδής του κύκλου } C$$

Είναι $|w_1 - w_2| = 4 = 2\rho$, άρα η AB είναι διάμετρος του κύκλου C και το K μέσο του AB

1^η λύση

Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των w_1, w_2 ισούται με το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους, άρα Αν Λ είναι η εικόνα του μιγαδικού $w_1 + w_2$ τότε

$$\vec{O\Lambda} = \vec{OA} + \vec{OB} \Leftrightarrow$$

$$\vec{O\Lambda} = 2 \vec{OK} = (-2, 0)$$

άρα $\Lambda (-2, 0)$ και

$$w_1 + w_2 = -2 \text{ και}$$

$$|w_1 + w_2| = |-2| = 2$$

2^η λύση

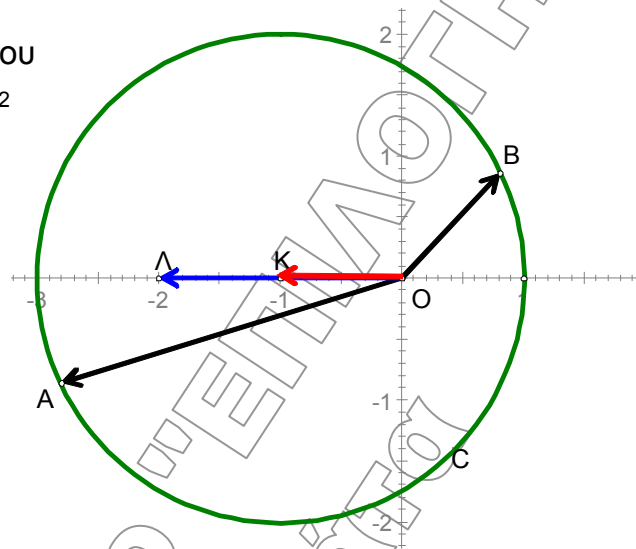
Αν $w_1 = \alpha + \beta i$ και $w_2 = \gamma + \delta i$, τότε $A(\alpha, \beta)$ και $B(\gamma, \delta)$.

Επίσης $w_1 + w_2 = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i$

Το $K(-1, 0)$ είναι το μέσο του AB , άρα

$$\begin{cases} x_K = \frac{\alpha + \gamma}{2} \Leftrightarrow -1 = \frac{\alpha + \gamma}{2} \Leftrightarrow \alpha + \gamma = -2 \\ y_K = \frac{\beta + \delta}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{\beta + \delta}{2} \Leftrightarrow \beta + \delta = 0 \end{cases}$$

Επομένως $w_1 + w_2 = -2$ και $|w_1 + w_2| = |-2| = 2$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. • $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x-2)\ln x + x - 3] = +\infty$

άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$ ($y'y$)

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-2)\ln x + x - 3] = +\infty$

άρα η C_f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-2)\ln x + x - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x} \ln x + 1 - \frac{3}{x} \right) = +\infty$

άρα η C_f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες

Γ2. $f'(x) = \ln x + \frac{x-2}{x} + 1 = \ln x + 2 - \frac{2}{x}, x > 0$

$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} > 0$, για $x > 0$, άρα η f' είναι γν.αύξουσα στο $(0, +\infty)$

• $0 < x < 1 \xRightarrow{f' \uparrow} f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$,
 άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $(0, 1)$

• $x > 1 \xRightarrow{f' \uparrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$,
 άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $(1, +\infty)$

Γ3. • Στο $\Delta_1 = (0, 1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} f(1) = -2$

άρα $f(\Delta_1) = (-2, +\infty)$ και επειδή $0 \in f(\Delta_1)$

η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο Δ_1

• Στο $\Delta_2 = [1, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα

Είναι $f(1) = -2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

άρα $f(\Delta_2) = [-2, +\infty)$ και επειδή $0 \in f(\Delta_2)$

η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο Δ_2

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Γ4. Είναι $f(x_1) = f(x_2) = 0$ με $x_1 < 1 < x_2$.

1^η λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση h , με $h(x) = \frac{f(x)}{x}, x > 0$.

➤ η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$

➤ η h είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με $h'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$

➤ $h(x_1) = h(x_2) = 0$

από Θ. Rolle προκύπτει ότι

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{\xi \cdot f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow \xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0 \quad (1)$

2^η λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση g , με $g(x) = x \cdot f'(x) - f(x), x > 0$

➤ η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, ως πράξεις συνεχών

➤ $g(x_1) = x_1 f'(x_1) - f(x_1) = x_1 f'(x_1) < 0$, διότι $x_1 > 0$ και $f'(x_1) < 0$

➤ $g(x_2) = x_2 f'(x_2) - f(x_2) = x_2 f'(x_2) > 0$, διότι $x_2 > 0$ και $f'(x_2) > 0$

από Θ. Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0 \quad (1)$

Η μοναδικότητα του ξ προκύπτει από τη μονοτονία της g .
 $g'(x) = [x \cdot f'(x) - f(x)]' = f''(x) > 0$, άρα η g είναι γν. αύξουσα.
 Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ είναι :
 $(\varepsilon) : y - f(\xi) = f'(\xi) \cdot (x - \xi)$
 Για να διέρχεται η (ε) από την αρχή των αξόνων αρκεί οι συντεταγμένες του O να επαλήθευουν την εξίσωση της (ε) ,
 δηλαδή $0 - f(\xi) = f'(\xi) \cdot (0 - \xi) \Leftrightarrow -f(\xi) = -\xi f'(\xi) \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$ που ισχύει από τη σχέση (1).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, άρα η f' είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- $x < 0 \xRightarrow{f' \uparrow} f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$,
 άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$
- $x > 0 \xRightarrow{f' \uparrow} f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$,
 άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$ την τιμή $f(0) = 1$,
 άρα $f(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\Delta 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^1 f(xt) dt + x^3}{\eta \mu^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 f(xt) x dt + \frac{x^3}{x^3}}{\frac{\eta \mu^3 x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du + 1}{\left(\frac{\eta \mu x}{x}\right)^3} = +\infty$$

διότι • $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu x}{x}\right)^3 = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x}\right)^3 = 1^3 = 1$ και

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^3} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[f(x) \cdot \frac{1}{3x^2} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3x^2} \stackrel{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1}{=} = +\infty
 \end{aligned}$$

Δ3. 1^η λύση

$$f'(x) + 2x = 2x \cdot [f(x) + x^2] \stackrel{f(x) \geq 1}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x) + 2x}{f(x) + x^2} = 2x \Leftrightarrow$$

$$(\ln[f(x) + x^2])' = (x^2)' \stackrel{\text{συνέπειες ΘΜΤ}}{\Rightarrow} \ln[f(x) + x^2] = x^2 + c$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ έχουμε } \ln f(0) = c \Leftrightarrow c = 0$$

$$\text{Άρα } \ln[f(x) + x^2] = x^2 \Leftrightarrow f(x) + x^2 = e^{x^2} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = e^{x^2} - x^2$$

2^η λύση

$$f'(x) + 2x = 2x \cdot [f(x) + x^2] \Leftrightarrow f'(x) - 2x \cdot f(x) = -2x + 2x^3 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot f(x) \cdot e^{-x^2} = -2x \cdot e^{-x^2} + 2x^3 \cdot e^{-x^2} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \cdot e^{-x^2} + f(x) \cdot (e^{-x^2})' = (-x^2)' \cdot e^{-x^2} + (-x^2) \cdot (e^{-x^2})' \Leftrightarrow$$

$$(f(x) \cdot e^{-x^2})' = (-x^2 \cdot e^{-x^2})' \xRightarrow{\text{συνέπειες ΟΜΤ}} f(x) \cdot e^{-x^2} = -x^2 \cdot e^{-x^2} + c$$

$$\text{Για } x=0 \text{ έχουμε } f(0) \cdot e^0 = 0 + c \Leftrightarrow c=1$$

$$\text{Άρα } f(x) \cdot e^{-x^2} = -x^2 \cdot e^{-x^2} + 1 \xRightarrow{\cdot e^{x^2}} f(x) = -x^2 + e^{x^2} \text{ ή } f(x) = e^{x^2} - x^2$$

Δ4. 1^η λύση

$$h'(x) = f(x+2) - f(x), x \geq 0$$

$$h''(x) = f'(x+2) - f'(x) > 0$$

διότι η f' είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $x+2 > x$

άρα η h' είναι γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$

$$h'(0) = f(2) - f(0) = e^4 - 5 > 0$$

$$x \geq 0 \xRightarrow{h' \uparrow} h'(x) \geq h'(0) \text{ άρα } h'(x) > 0,$$

άρα η h είναι γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$

2^η λύση

$$h'(x) = f(x+2) - f(x), x \geq 0$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{x^2} - 2x = 2x \cdot (e^{x^2} - 1) > 0, \text{ για } x > 0$$

άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$

$$\text{Είναι } x+2 > x \geq 0 \xRightarrow{f \uparrow} f(x+2) > f(x) \Leftrightarrow h'(x) > 0,$$

άρα η h είναι γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Η ανίσωση γίνεται

$$\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t) dt < \int_4^6 f(t) dt \Leftrightarrow h(x^2+2x+1) < h(4)$$

$$\text{Είναι } x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0 \text{ και } 4 > 0$$

και επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

$$\text{έχουμε } x^2 + 2x + 1 < 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$$