

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 194

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 149

A3. α. Σωστό, β. Σωστό, γ. Σωστό, δ. Λάθος, ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

B1. • η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$

• $f(a) = 5\beta > 0$ και $f(\beta) = 5a < 0$

από Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (a, β) .

B2. Είναι $\lambda_\varepsilon = \frac{1}{5}$, άρα για να είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο

$M(\xi, f(\xi))$ κάθετη στην ευθεία (ε) , αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -5$.

1^η λύση

• η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$

• η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, β)

από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} = \frac{5a - 5\beta}{\beta - a} = \frac{-5(\beta - a)}{\beta - a} = -5$$

2^η λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση h , με $h(x) = f(x) + 5x$.

• η h είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, ως άθροισμα συνεχών

• η h είναι παραγωγίσιμη στο (a, β) , με $h'(x) = f'(x) + 5$

• $h(a) = f(a) + 5a = 5\beta + 5a$

$h(\beta) = f(\beta) + 5\beta = 5a + 5\beta$

από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + 5 = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = -5.$$

B3. 1^η λύση

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$
- $f(\beta) = 5a < \frac{5}{2}(a + \beta) < 5\beta = f(a)$, διότι $a < \frac{a + \beta}{2} < \beta$
από Θ. ενδιαμέσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$,
τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{5}{2}(a + \beta)$.

2^η λύση

- Θεωρούμε τη συνάρτηση g , με $g(x) = f(x) - \frac{5}{2}(a + \beta)$
- η g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$
 - $g(a) = f(a) - \frac{5}{2}(a + \beta) = 5\beta - \frac{5}{2}(a + \beta) = \frac{5}{2}(\beta - a) > 0$
 $g(\beta) = f(\beta) - \frac{5}{2}(a + \beta) = 5a - \frac{5}{2}(a + \beta) = \frac{5}{2}(a - \beta) < 0$
από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε
 $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - \frac{5}{2}(a + \beta) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{5}{2}(a + \beta)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $z_2 = \overline{z_1}$.

$$z_1 z_2 = \frac{\gamma}{1} = \gamma \text{ και } z_1 z_2 = z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2 = 5^2 = 25, \text{ άρα } \gamma = 25.$$

Γ2. Η εξίσωση γίνεται : $z^2 - 6z + 25 = 0$

$$\Delta = -64 \text{ και } z_{1,2} = \frac{6 \pm i\sqrt{64}}{2} = 3 \pm 4i$$

και επειδή $\text{Im}(z_1) > 0$ θα είναι $z_1 = 3 + 4i$ και $z_2 = 3 - 4i$.

Γ3. $|w - z_1| = |w - z_2| \Leftrightarrow |x + yi - 3 - 4i| = |x + yi - 3 + 4i| \Leftrightarrow$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} \Leftrightarrow$$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = (x-3)^2 + (y+4)^2 \Leftrightarrow$$

$$y^2 - 8y + 16 = y^2 + 8y + 16 \Leftrightarrow -16y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow w \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{Γ4. } (z_1 - 2 - 3i)^8 + (z_2 - 4 + 5i)^8 &= (3 + 4i - 2 - 3i)^8 + (3 - 4i - 4 + 5i)^8 \\ &= (1 + i)^8 + (-1 + i)^8 \\ &= [(1 + i)^2]^4 + [(-1 + i)^2]^4 \\ &= (2i)^4 + (-2i)^4 = 16 + 16 = 32 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Πρέπει και αρκεί $9 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Leftrightarrow |x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$

Άρα $D_f = [-3, 3]$

Δ2. α. Για $x \in (-3, 3)$ είναι :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+3)' \cdot \sqrt{9-x^2} + (x+3) \cdot (\sqrt{9-x^2})' \\ &= \sqrt{9-x^2} + (x+3) \frac{(9-x^2)'}{2\sqrt{9-x^2}} = \sqrt{9-x^2} + (x+3) \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \\ &= \frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{-x(x+3)}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{-2x^2-3x+9}{\sqrt{9-x^2}} \end{aligned}$$

β. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)\sqrt{9-x^2}}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{9-x^2} = 0$
 άρα $f'(-3) = 0$.

Δ3. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 3x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ ή } x = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$	-3	$\frac{3}{2}$	3	$+\infty$
$f'(x)$		○	+	○	-
$f(x)$					
		Τ. ελάχιστο		Τ. μέγιστο	Τ. ελάχιστο

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$

Δ4. τοπικό ελάχιστο : $f(-3) = 0$

τοπικό μέγιστο : $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} + 3\right) \sqrt{9 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$

τοπικό ελάχιστο : $f(3) = 0$