

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β)
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέμα 1ο

- Α. Απόδειξη σελ. 251 (σχολικό)
 Β. Ορισμός σελ. 213 (σχολικό)
 Γ. α. → Σωστό, β. → Σωστό, γ. → Λάθος, δ. → Λάθος, ε. → Λάθος

Θέμα 2ο

- Α. Θέτουμε $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε

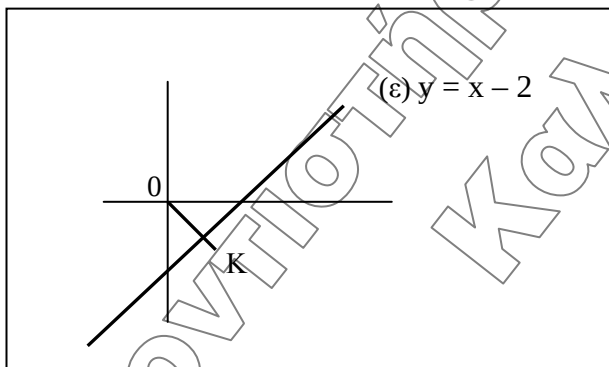
$$z = x + yi$$

$$z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i$$

$$\text{οπότε } \begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 1 \end{cases} \begin{matrix} \\ (-1) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ -y = -2\lambda + 1 \end{cases} \xrightarrow{(+)} x - y = 2 \Leftrightarrow y = x - 2$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών z είναι η (ε) $y = x - 2$

- Β.



Ο μιγαδικός με το μικρότερο δυνατό μέτρο είναι το σημείο τομής των

ΟΚ: $y = \lambda_{OK}x$ όπου $\lambda_{OK} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{OK} = -1$ δηλαδή της ΟΚ: $y = -x$ και της (ε)

$$y = x - 2$$

$$\begin{cases} y = -x \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = x - 2 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Άρα $z = 1 - i$

Γ. Θέτουμε $w = x + yi$ $x, y \in \mathbb{R}$, Τότε

$$|w|^2 + \bar{w} - 12 = 1 - i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - yi - 12 = 1 - i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + x - 12) - yi = 1 - i$$

$$\text{Οπότε } \begin{cases} x^2 + y^2 + x - 12 = 1 \\ -y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 12 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Άρα $w = 3 + i$ ή $w = -4 + i$.

Θέμα 3ο

Α. Αφού $f(x) \geq 1$ και $f(0) = 1$ έχουμε $f(x) \geq f(0)$. Άρα η f έχει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 0$ και f παραγωγίσιμη σε αυτό, άρα από Θ. Fermat έχουμε $f'(0) = 0$ (1)

$$\text{Όμως } f'(x) = \alpha^x \ln \alpha - \frac{1}{x+1}$$

$$\text{Άρα η (1): } \ln \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e.$$

Β.α. Για $\alpha = e$ έχουμε $f(x) = e^x - \ln(x+1)$, $x > -1$

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}, f''(x) = e^x - \frac{-1}{(x+1)^2} = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

Άρα η f είναι κυρτή.

$$\beta. f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}, f'(0) = 0.$$

Όμως $f''(x) > 0$ από α ερώτημα.

Άρα $f' \uparrow$ στο $(-1, +\infty)$

$$\text{Για } -1 < x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) \Rightarrow f'(x) < 0$$

Άρα $f \downarrow$ στο $(-1, 0]$

$$\text{Για } x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 0.$$

Άρα $f \uparrow$ στο $[0, +\infty)$

$$\gamma. \frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(f(\beta)-1) + (x-1)(f(\gamma)-1) = 0$$

$$\text{Έστω } g(x) = (x-2)(f(\beta)-1) + (x-1)(f(\gamma)-1), x > -1$$

• g συνεχής στο $[1, 2]$ ως πολυωνυμική

$$\bullet g(1) = -(f(\beta)-1)$$

$$g(2) = f(\gamma)-1$$

Από το β ερώτημα έχουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το $f(0) = 1$.

Άρα $f(x) > 1 \quad \forall x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

Οπότε $f(\beta) > 1 \Leftrightarrow f(\beta) - 1 > 0$ και $f(\gamma) > 1 \Leftrightarrow f(\gamma) - 1 > 0$.

Άρα $g(1) = -(f(\beta) - 1) < 0$

$g(2) = -f(\gamma) - 1 > 0$.

Οπότε ισχύει το Θ. Bolzano δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

Θέμα 4ο

α.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t) dt + 3 \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\int_0^x t f(t) dt}{x} - \int_0^x f(t) dt + 3 \right] \quad (1)$$

$$\text{Το } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x t f(t) dt}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0^+} \frac{x f(x)}{1} \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} 0 \cdot f(0) = 0.$$

$$\text{Το } \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x f(t) dt \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής} \Rightarrow \int_0^x f(t) dt \\ \text{παραγωγίσιμη άρα και συνεχής}}}{=} \int_0^0 f(t) dt = 0.$$

Άρα η $(1) = 0 - 0 + 3 = 3$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - t^2}}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1^2 - (1 - t^2)}{t^2 (1 + \sqrt{1 - t^2})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{2}.$$

Άρα $G(0) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = G(0) \Rightarrow G$ συνεχής στο $x_0 = 0$ και η G συνεχής στο $(0, 2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών.

$\Rightarrow G$ συνεχής στο $[0, 2]$

β. f συνεχής στο $[0, 2] \Rightarrow \int_0^x f(t) dt$ παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$.

Η συνάρτηση $h(t) = t f(t)$ συνεχής στο $[0, 2] \Rightarrow \int_0^x t f(t) dt$ παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$.

Άρα η G παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ ως αποτέλεσμα παραγωγίσιμων.

$$\text{Έχουμε } G(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3.$$

$$\text{Άρα } G'(x) = \frac{xf(x) \cdot x - \int_0^x tf(t)dt}{x^2} - f(x) =$$

$$= \cancel{f(x)} - \frac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2} - \cancel{f(x)} =$$

$$= -\frac{H(x)}{x^2}, \quad 0 < x < 2.$$

γ. Η G συνεχής στο $[0, 2]$

Η G παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$

$$G(0) = 3$$

$$G(2) = \frac{H(2)}{2} - \int_0^2 f(t)dt + 3 = \frac{\int_0^2 tf(t)dt}{2} - \int_0^2 f(t)dt + 3$$

$$\text{Αλλά } \int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 tf(t)dt - 2\int_0^2 f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 tf(t)dt = 2\int_0^2 f(t)dt \quad (1).$$

$$\text{Άρα } G(2) = \frac{\int_0^2 tf(t)dt}{2} - \int_0^2 f(t)dt + 3 \stackrel{(1)}{=} \frac{2 \cdot \int_0^2 f(t)dt}{2} - \int_0^2 f(t)dt + 3 = 3$$

$$\text{Οπότε } G(0) = G(2).$$

Άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει $\alpha \in (0, 2) : G'(\alpha) = 0$

$$\Rightarrow \frac{H(\alpha)}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow H(\alpha) = 0.$$

$$\delta. \text{ Είναι } G(a) = \frac{H(a)}{a} - \int_0^a f(t)dt + 3 = -\int_0^a f(t)dt + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^a f(t)dt = 3 - G(a) = G(0) - G(a)$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι: $\exists \xi \in (0, \alpha)$ τέτοιο ώστε

$$\alpha \int_0^{\xi} t f(t) dt = \xi^2 (G(0) - G(a))$$

$$\Leftrightarrow \frac{\int_0^{\xi} t f(t) dt}{\xi^2} = \frac{G(0) - G(a)}{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{G(0) - G(a)}{a} \Leftrightarrow -G'(\xi) = \frac{G(0) - G(a)}{a} = G'(\xi) = \frac{G(a) - G(0)}{a}$$

Από Θ.Μ.Τ. για την G στο $[0, a]$

G συνεχής $[0, 4]$

G παραγωγίσιμη στο $(0, \alpha)$

$$\Rightarrow \exists \xi \in (0, \alpha) : G'(\xi) = \frac{G(\alpha) - G(0)}{\alpha}.$$

Επιμέλεια απαντήσεων:

Δραγώνας Μπάμπης

Γκιούλος Θεόδωρος

Μαθηματικοί

Φροντιστήριο Μ.Ε «ΕΠΙΛΟΓΗ» - Καλαμάτα