

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΛΙΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 224

A.2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 188

B. α. Σωστό

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Λάθος

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αν $z = x + yi$, τότε

$$(2 - i)z + (2 + i)\bar{z} - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2 - i)(x + yi) + (2 + i)(x - yi) - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x + 2yi - xi + y + 2x - 2yi + xi + y - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x + 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2y = -4x + 8 \Leftrightarrow$$

$$y = -2x + 4 \quad (1)$$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία
(ε) : $y = -2x + 4$.

β. Από τη σχέση (1) για $y = 0$ έχουμε $x = 2$, άρα $z_1 = 2$

Από τη σχέση (1) για $x = 0$ έχουμε $y = 4$, άρα $z_2 = 4i$

$$\begin{aligned} \gamma. |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= |2 + 4i|^2 + |2 - 4i|^2 \\ &= \left(\sqrt{2^2 + 4^2}\right)^2 + \left(\sqrt{2^2 + (-4)^2}\right)^2 \\ &= 4 + 16 + 4 + 16 \\ &= 40 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Έστω $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \ln \frac{(\lambda + 1)x^2 + x + 1}{x + 2}, \quad x > -1$$

$$\text{και } e^{f(x)} = \frac{(\lambda + 1)x^2 + x + 1}{x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{f(x)} \stackrel{f(x)=u}{=} \lim_{\substack{f(x)=u \\ x \rightarrow +\infty}} e^u = e^L \in \mathbb{R}$$

$$\text{άρα και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda + 1)x^2 + x + 1}{x + 2} \in \mathbb{R}$$

Ο παρονομαστής είναι πρώτου βαθμού πολυώνυμο
 άρα πρέπει και ο αριθμητής να είναι επίσης πρώτου βαθμού
 άρα $\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$

Β. Για $\lambda = -1$ είναι $f(x) = \ln(x + 1) - \ln(x + 2), x > -1$

$$\alpha. f'(x) = \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{(x + 1)(x + 2)} > 0, \text{ για } x > -1.$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [\ln(x + 1) - \ln(x + 2)] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x + 1) - \ln(x + 2)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x + 1}{x + 2} \stackrel{\frac{x+1}{x+2}=u}{=} \lim_{\substack{\frac{x+1}{x+2}=u \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1}} \ln u = 0$$

άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, 0)$.

β. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, άρα

η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = -1$ και

η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 0$ ($x'x$)

γ. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $f(x) = -\alpha^2 < 0$.

Το $-\alpha^2$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$,

άρα η εξίσωση $f(x) = -\alpha^2$ έχει μοναδική λύση, για κάθε $\alpha \neq 0$

ΘΕΜΑ 4ο

$$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = kxe^{2x}, 0 \leq x \leq 2 \quad (1)$$

$$g(x) = 3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}, 0 \leq x \leq 2$$

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \left(3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}} \right)' \\
 &= 6x - \frac{[f''(x) - 2f'(x)] \cdot e^{2x} - [f'(x) - 2f(x)] \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x})^2} \\
 &= 6x - \frac{f''(x) - 2f'(x) - 2f'(x) + 4f(x)}{e^{2x}} \\
 &= 6x - \frac{f''(x) - 4f'(x) + 4f(x)}{e^{2x}} \quad (2) \\
 &= 6x - \frac{kxe^{2x}}{e^{2x}} = 6x - kx \\
 &= (6 - k)x \quad (3)
 \end{aligned}$$

- α. • Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ ως πράξεις συνεχών
 • Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ με $g'(x) = (6 - k)x$

$$g(0) = \frac{f'(0) - 2f(0)}{e^0} = \frac{2f(0) - 2f(0)}{1} = 0$$

$$\begin{aligned}
 g(2) &= 12 - \frac{f'(2) - 2f(2)}{e^4} = 12 - \frac{2f(2) + 12e^4 - 2f(2)}{e^4} \\
 &= 12 - \frac{12e^4}{e^4} = 12 - 12 = 0
 \end{aligned}$$

Άρα η g ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

- β. Από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$, τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 6\xi - \frac{f''(\xi) - 4f'(\xi) + 4f(\xi)}{e^{2\xi}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$6\xi e^{2\xi} - f''(\xi) + 4f'(\xi) - 4f(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f''(\xi) + 4f(\xi) = 6\xi e^{2\xi} + 4f'(\xi)$$

$$\gamma. g'(\xi) = 0 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} (6 - k)\xi = 0 \stackrel{\xi > 0}{\Leftrightarrow} 6 - k = 0 \Leftrightarrow k = 6$$

$$\stackrel{k=6}{(3)} \Rightarrow g(x) = 0, \text{ για κάθε } x \in [0, 2], \text{ άρα } g \text{ σταθερή στο } [0, 2]$$

και επειδή $g(0) = 0$, θα είναι $g(x) = 0$, για κάθε $x \in [0, 2]$

δ. Για κάθε $x \in [0, 2]$ είναι :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x^2 = \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}} \Leftrightarrow$$

$$(x^3)' = \left[\frac{f(x)}{e^{2x}} \right]' \quad \text{συνέπειες Θ.Μ.Τ.} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{e^{2x}} = x^3 + c \Leftrightarrow$$

$$f(x) = (x^3 + c)e^{2x} \quad (4)$$

$$(4) \xrightarrow{x=1} f(1) = (1+c)e^2 \Leftrightarrow e^2 = (1+c)e^2 \Leftrightarrow c=0$$

$$(4) \xrightarrow{c=0} f(x) = x^3 e^{2x}, x \in [0, 2]$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon. \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx &= \int_1^2 \frac{x^3 e^{2x}}{x^2} dx \\
 &= \int_1^2 x e^{2x} dx \\
 &= \int_1^2 x \left(\frac{e^{2x}}{2} \right)' dx \\
 &= \left[x \frac{e^{2x}}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 (x)' \cdot \frac{e^{2x}}{2} dx \\
 &= e^4 - \frac{e^2}{2} - \int_1^2 \frac{e^{2x}}{2} dx \\
 &= e^4 - \frac{e^2}{2} - \left[\frac{e^{2x}}{4} \right]_1^2 \\
 &= e^4 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{4} \\
 &= \frac{4e^4 - 2e^2 - e^4 + e^2}{4} \\
 &= \frac{3e^4 - e^2}{4}
 \end{aligned}$$