

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΕΕ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 2008

ΘΕΜΑ 1^ο

- α. Η μέση βαθμολογία των μαθητών είναι: $\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{5} = \frac{8 + 12 + 14 + 16 + 20}{5} = \frac{70}{5} = 14$
- β. Οι βαθμοί κατά αύξουσα σειρά είναι: 8, 12, 14, 16, 20 και επειδή το πλήθος είναι περιττό, διάμεσος θα είναι η μεσαίος βαθμός δηλαδή δ=14
- γ. Από τον τύπο σελ. 88 του βιβλίου για την τυπική απόκλιση, προκύπτει:

$$S = \sqrt{\frac{(\bar{x} - t_1)^2 + \dots + (\bar{x} - t_5)^2}{5}} = \sqrt{\frac{(14 - 8)^2 + (14 - 12)^2 + (14 - 14)^2 + (14 - 16)^2 + (14 - 20)^2}{5}} =$$

$$\sqrt{\frac{6^2 + 2^2 + 0^2 + (-2)^2 + (-6)^2}{5}} = \sqrt{\frac{36 + 4 + 4 + 36}{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4$$

- δ. Το εύρος προκύπτει από τη διαφορά του μικρότερου βαθμού από το μεγαλύτερο, δηλαδή 20-8=12
- ε. Από τον τύπο σελ. 89 του βιβλίου για το συντελεστή μεταβλητότητας, προκύπτει:

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} 100\% = \frac{4}{14} 100\% = 28,57\%$$

Το δείγμα δεν είναι ομοιογενές, διότι η τιμή του συντελεστή μεταβλητότητας είναι πάνω από το 10%

ΘΕΜΑ 2^ο

α. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x(x-1)} = \frac{\sqrt{1} - 1}{1(1-1)} = \frac{0}{0} = \frac{0}{0}$ (απροσδιόριστη μορφή)

Πολλαπλασιάζουμε και τους 2 όρους του κλάσματος με τη συζυγή παράσταση του αριθμητή, οπότε θα έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{x(x-1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\sqrt{x})^2 - 1}{x(x-1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{x(x-1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{1(\sqrt{1} + 1)} = \frac{1}{2}$$

β. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{3x-1} = \frac{1}{3 \cdot 1 - 1} = \frac{1}{2}$

γ. Για να είναι η f συνεχής στη θέση x=1, θα πρέπει να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

Λόγω των ερωτημάτων α,β και επειδή $f(1) = \frac{1}{3 \cdot 1 - 1} = \frac{1}{2}$

θα έχουμε ότι: $\frac{1}{2 \cdot \lambda} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = 1$

ΘΕΜΑ 3^ο

α. $f'(x) = (e^{2x})' = e^{2x}(\lambda x)' = e^{2x} \cdot \lambda = \lambda \cdot e^{2x}$

$f''(x) = (\lambda e^{2x})' = \lambda e^{2x}(\lambda x)' = \lambda e^{2x} \cdot \lambda = \lambda^2 \cdot e^{2x}$

β. $f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 e^{2x} - \lambda e^{2x} - 2e^{2x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x}(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

αφού $e^{2x} \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$

$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{matrix} \nearrow -1 \\ \searrow 2 \end{matrix}$ Άρα $\lambda = 2$ ή $\lambda = -1$

γ. Για $\lambda=2$ $f'(x) = (e^{2x})' = e^{2x} \cdot (2x)' = 2 \cdot e^{2x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ($e^{ax} > 0$ για κάθε $a, x \in \mathbb{R}$). Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για $\lambda=-1$ $f'(x) = (e^{-x})' = e^{-x}(-x)' = -e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ($e^{ax} > 0$ για κάθε $a, x \in \mathbb{R}$). Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 4^ο

α. $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2008 \right)' = x^2 - 4x + 3$

β. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$. Θα βρούμε το πρόσημο και τις ρίζες του τριωνύμου

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \rightarrow 1 \end{matrix}$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	TM	$\searrow$	TE	$\nearrow$	

Στο $(-\infty, 1) \cup [3, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα

Στο $[1, 3]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

Στο $x_0=1$ η f παρουσιάζει Τοπικό Μέγιστο το $f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 2008 =$

$$\frac{1}{3} - 2 + 3 + 2008 = \frac{1}{3} + 2009 = \frac{6028}{3}$$

Στο $x_0=3$ η f παρουσιάζει Τοπικό Ελάχιστο το $f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 2008 = 9 - 18 + 9 + 2008 = 2008$

γ. Στο διάστημα $[1, +\infty)$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=3$ το $f(3)=2008$. Άρα $f(x) \geq 2008$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$

ΔΕΤΟΡΑΚΗΣ ΣΤΑΥΡΟΣ - ΛΑΥΡΕΝΤΑΚΗ ΜΑΡΙΑ - ΣΑΡΑΝΤΙΔΗΣ ΣΤΑΥΡΟΣ