

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΜΑΪΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1. σελ. 235

A.2 σελ. 191

B. α. $\rightarrow \Sigma$, β. $\rightarrow \Sigma$ γ. $\rightarrow \Lambda$ δ. $\rightarrow \Lambda$ ε. $\rightarrow \Sigma$

ΘΕΜΑ 2^ο

α. $\left| (i + 2\sqrt{2})z \right| = 6 \Leftrightarrow \left| i + 2\sqrt{2} \right| |z| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2} |z| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{8+1} |z| = 6 \Leftrightarrow 3|z| = 6 \Leftrightarrow |z| = 2$. Άρα ο Γ.Τ. των εικόνων του z είναι κύκλος κέντρου (0,0) και $\rho = 2$. Δηλαδή $x^2 + y^2 = 4$.

β. $|w - (1-i)| = |w - (3-3i)|$, ο Γ.Τ. των εικόνων του w είναι η μεσοκάθετος των σημείων A(1,-1) και B(3,-3).

$$\lambda_{AB} = \frac{-3+1}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1. \text{ Άρα } \lambda_{\text{μεσοκάθ.}} = 1.$$

Το μέσο M των A, B είναι $M\left(\frac{1+3}{2}, \frac{-1-3}{2}\right) = (2, -2)$

Άρα εξίσωση μεσοκαθέτου: $y + 2 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 4$

2ος τρόπος

Θέτουμε: $w = x + yi$

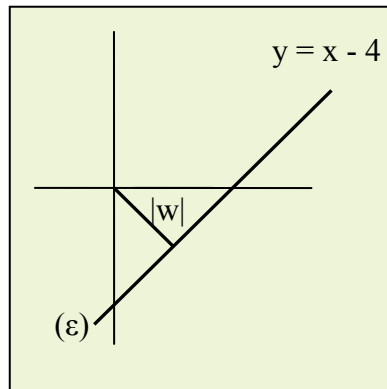
$$\text{Άρα } |x + yi - 1 + i| = |x + yi - 3 + 3i| \Rightarrow |(x-1) + (y+1)i| = |(x-3) + (y+3)i| \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+3)^2} \Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = (x-3)^2 + (y+3)^2 \Rightarrow$$

$$\cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} + 2y + 1 = \cancel{x^2} - 6x + 9 + \cancel{y^2} + 6y + 9 \Rightarrow 2y - 6y = -6x + 2x + 16 \Rightarrow -4y = -4x + 16 \Rightarrow y = x - 4.$$

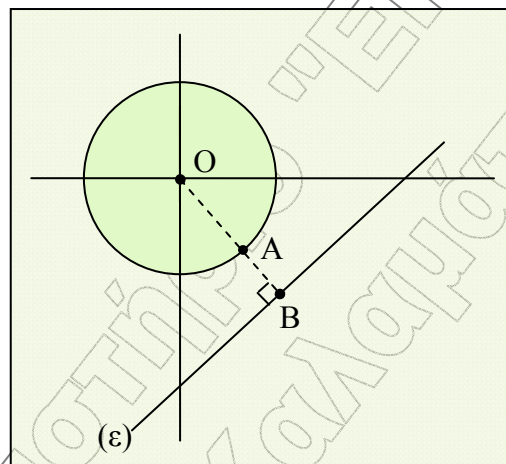
γ. Το $|w|$ είναι η απόσταση της εικόνας του w από την αρχή των αξόνων. Άρα το ελάχιστο μέτρο $|w|$ είναι η απόσταση της αρχής των αξόνων από την (ε).

$$(ε): x - y - 4 = 0$$



$$d(o, \varepsilon) = \frac{|0 - 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

- δ. Το $|z - w|$ είναι η απόσταση της εικόνας του z από την εικόνα του w . Αυτό γίνεται ελάχιστο όταν οι εικόνες των z, w είναι τα σημεία τομής της καθέτου από την αρχή των αξόνων προς την (ε) , με τον κύκλο και την (ε) .



Δηλαδή το ελάχιστο $|z - w| = (AB) = d(O, \varepsilon) - \rho = 2\sqrt{2} - 2$.

ΘΕΜΑ 3^ο

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) \stackrel{0(-\infty) \text{ Απρος.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty} \text{ Απρος.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} \stackrel{\text{D'L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

και $f(0) = 0$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. Άρα η f συνεχής στο $x_0 = 0$.

β. Για $x > 0$, $f'(x) = (x \ln x)' = \ln x + 1$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \ln x + 1 > 0 \Rightarrow \ln x > -1 \Rightarrow x > e^{-1}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \ln x + 1 < 0 \Rightarrow \ln x < -1 \Rightarrow 0 < x < e^{-1}$$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Ο.Ε για $x = \frac{1}{e}$ το $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$. Άρα $f(x) \geq -\frac{1}{e}$.

$$f\left[0, \frac{1}{e}\right] \stackrel{f \downarrow}{=} \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(0)\right] = \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$$

και συνεχής

$$f\left(\frac{1}{e}, +\infty\right) \stackrel{f \uparrow}{=} \left(\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) = \left(-\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

και συνεχής

$$\text{Το } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x) \stackrel{+\infty(+\infty)}{=} +\infty.$$

$$\text{Άρα } f(A) = \left[-\frac{1}{e}, 0\right] \cup \left(-\frac{1}{e}, +\infty\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right].$$

γ. Η εξίσωση $x = e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \alpha \text{ φου } x > 0$

$$\ln x = \ln e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x \ln x = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha.$$

Διακρίνω περιπτώσεις.

i) Αν $\alpha < -\frac{1}{e}$ τότε επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right]$.

Η εξίσωση $f(x) = \alpha$ είναι αδύνατη.

ii) Αν $\alpha = -\frac{1}{e}$ τότε επειδή $f\left[0, \frac{1}{e}\right] = \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ και $f \downarrow$ στο $\left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μοναδική ρίζα στο $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ και μάλιστα είναι η $x = \frac{1}{e}$.

Και αφού $f\left(\frac{1}{e}, +\infty\right) = \left(-\frac{1}{e}, +\infty\right)$ και άρα το $-\frac{1}{e} \notin \left(-\frac{1}{e}, +\infty\right)$ η εξίσωση

$f(x) = \alpha = -\frac{1}{e}$ είναι αδύνατη. Άρα όταν $\alpha = -\frac{1}{e}$ η εξίσωση $f(x) = \alpha = -\frac{1}{e}$

έχει μοναδική ρίζα την $x = \frac{1}{e}$

iii) Αν $-\frac{1}{e} < \alpha \leq 0$ τότε επειδή $f\left[0, \frac{1}{e}\right] = \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ και $\alpha \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right] = f\left[0, \frac{1}{e}\right]$ και $f \downarrow$ θα υπάρξει ακριβώς ένα $x_1 \in \left[0, \frac{1}{e}\right] : f(x_1) = \alpha$ και επειδή $f\left(\frac{1}{e}, +\infty\right) = \left(-\frac{1}{e}, +\infty\right)$ και $\alpha \in \left(-\frac{1}{e}, +\infty\right) = f\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ και $f \uparrow$ άρα θα υπάρξει ακριβώς ένα $x_2 \in \left(-\frac{1}{e}, +\infty\right) : f(x_2) = \alpha$. Άρα η $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς 2 ρίζες.

iv) Αν $\alpha > 0$ τότε αφού $f\left[0, \frac{1}{e}\right] = \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ και $\alpha \notin \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ η εξίσωση $f(x) = \alpha$ είναι αδύνατη στο $\left[0, \frac{1}{e}\right]$. Ενώ αφού $f\left(\frac{1}{e}, +\infty\right) = \left(-\frac{1}{e}, +\infty\right)$ και $\alpha \in \left(-\frac{1}{e}, +\infty\right)$ και $f \uparrow$ άρα η $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς μία ρίζα. Άρα η $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς μία ρίζα όταν $\alpha > 0$.

δ. Θ.Μ.Τ για την f στο $[x, x+1]$ με $x > 0$.

f συνεχής στο $[x, x+1]$

f παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$.

Άρα θα υπάρξει $\xi \in (x, x+1) : f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x)$.

Αλλά $f'(x) = \ln x + 1$.

$$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$$

Άρα γνησίως αύξουσα.. Άρα $x < \xi < x+1$.

$$f'(x) < f'(\xi) < f'(x+1)$$

$$f(x+1) - f(x) < f'(x+1).$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α. $f(x) = (10x^3 + 3x) \int_0^2 f(t) dt - 45$

$$\int_0^2 f(t) dt = C \quad (1)$$

Άρα $f(x) = (10x^3 + 3x)c - 45$.

Άρα η (1): $\int_0^2 [(10x^3 + 3x)c - 45] dx = c \Rightarrow \left[\left(10 \frac{x^4}{4} + 3 \frac{x^3}{2} \right) c - 45x \right]_0^2 = c$

$[(40 + 6)c - 90 - 0] = c \Rightarrow 46c - 90 = c \Rightarrow 45c = 90 \Rightarrow c = 2$

Άρα $f(x) = (10x^3 + 3x)2 - 45 \Rightarrow f(x) = 20x^3 + 6x - 45$

β. Έχω $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x+(-h))}{h} \stackrel{u=-h}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x+u)}{-u} =$

$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{g'(x+u) - g'(x)}{u} = g''(x)$

γ. i. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} (g \text{ συνεχής}),$
 $\stackrel{D.L.H}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - 0 - g'(x-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h}$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x) + g'(x) - g'(x-h)}{2h} =$
 $\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g'(x+h) - g'(x)}{h} + \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} \right] = \frac{1}{2} [g''(x) + g''(x)] = g''(x)$

Άρα αφού $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$

$g''(x) = f(x) + 45$

$g''(x) = 20x^3 + 6x$

$g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + C_1$

Αλλά $g'(0) = 1$, άρα $C_1 = 1$ οπότε $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$

Άρα $g(x) = x^5 + x^3 + x + C_2$

Αφού $g(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1$

Συνεπώς $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

ii. $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ και g συνεχής, άρα g γνησίως αύξουσα $\Rightarrow$ και $1 - 1$

Επιμέλεια απαντήσεων:
Δραγώνας Μπάμπης – Μαθηματικός
Γκιούλος Θεόδωρος – Μαθηματικός
Φροντιστήριο Μ.Ε «ΕΠΙΛΟΓΗ» - Καλαμάτα
<http://www.epil.gr>