

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1. ~~Έστω η βάρβαρη ύλη~~ 217

A.2. ~~Έστω η βάρβαρη ύλη~~ 246

B. α. ~~Σύμφωνα με το~~ (.g. d f (x) = 5)

β. ~~Σύμφωνα με το~~

γ. ~~Έστω η βάρβαρη ύλη~~

δ. ~~Έστω η βάρβαρη ύλη~~

ε. ~~Σύμφωνα με το~~

ΘΕΜΑ 2^ο

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu 3x}{x} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu 3x}{3x} \stackrel{3x=u}{=} 3 \cdot \lim_{\substack{u \rightarrow 0^- \\ \text{αν } x \rightarrow 0^- \text{ τότε } u \rightarrow 0^-}} \frac{\eta\mu u}{u} = 3$$

β. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + \alpha x + \beta \sin x) = \beta \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)} \right\} \text{ άρα } \beta = 3$$

Για $x > 0$ είναι $f'(x) = 2x + \alpha - \beta \eta\mu x$.

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \alpha - \beta \eta\mu \frac{\pi}{2} = \pi \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

Επομένως **$\alpha = \beta = 3$** .

$$\gamma. \int_0^\pi f(x) dx = \int_0^\pi (x^2 + 3x + 3 \sin x) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 3\eta\mu x \right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{3} + \frac{3\pi^2}{2}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

α. $f'(x) = (e^x - e \cdot \ln x)' = e^x - \frac{e}{x}, x > 0$

$$f''(x) = \left(e^x - \frac{e}{x} \right)' = e^x + \frac{e}{x^2} > 0, x > 0$$

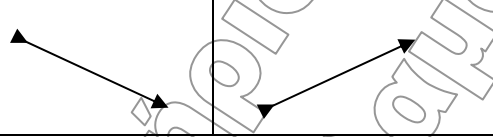
άρα η f' είναι γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Για $x > 1 \stackrel{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0,$

άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

β. Για $0 < x < 1 \stackrel{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0,$
 άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $(0, 1)$.

x	0	1	$+\infty$
f(x)			



Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1) = e$, άρα
 $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq e$, για κάθε $x > 0$.

γ. $\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(x) dx = \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \Leftrightarrow$
 $\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(x) dx - \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(x) dx - \int_2^4 f(x) dx = 0 \Leftrightarrow$
 $\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(x) dx + \int_{x^2+2}^{x^2+3} f(x) dx - \int_2^4 f(x) dx = 0 \Leftrightarrow$
 $\int_{x^2+1}^{x^2+3} f(x) dx - \int_2^4 f(x) dx = 0.$

Προφανής λύση η $x = 1$ **(1)**.

Θεωρούμε τη συνάρτηση g , με

$$g(x) = \int_{x^2+1}^{x^2+3} f(x) dx - \int_2^4 f(x) dx, \quad x > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } g'(x) &= \left[\int_{x^2+1}^{x^2+3} f(x) dx - \int_2^4 f(x) dx \right]' \\ &= 2x \cdot f(x^2+3) - 2x \cdot f(x^2+1) \\ &= 2x \cdot [f(x^2+3) - f(x^2+1)] > 0 \end{aligned}$$

διότι • $x > 0$ και

$$\begin{aligned} &\bullet \quad 1 \leq 1+x^2 < 3+x^2 \quad \begin{matrix} f \uparrow \text{ στο } (1, +\infty) \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \\ &\quad f(1+x^2) < f(3+x^2) \quad \Leftrightarrow \\ &\quad f(x^2+3) - f(x^2+1) > 0 \end{aligned}$$

Άρα η g είναι γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια το πολύ ρίζα **(2)**.

Από (1) και (2) προκύπτει ότι η $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τη **$x=1$** .

ΘΕΜΑ 4°

α. Είναι $z = \alpha + \beta i$ και $z_2 - z_1 = \gamma \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z_2 = \gamma + \alpha + \beta i$.

$$z_2 = \frac{2 - \bar{z}_1}{2 + \bar{z}_1} \Leftrightarrow \alpha + \gamma + \beta i = \frac{2 - \alpha + \beta i}{2 + \alpha - \beta i} \Leftrightarrow$$

$$(\alpha + \gamma + \beta i)(2 + \alpha - \beta i) = 2 - \alpha + \beta i \Leftrightarrow$$

$$2\alpha + \alpha^2 - \alpha\beta i + 2\gamma + \alpha\gamma - \beta\gamma i + 2\beta i + \alpha\beta i + \beta^2 - 2 + \alpha - \beta i = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha^2 + 3\alpha + \beta^2 + 2\gamma + \alpha\gamma - 2) + (\beta - \beta\gamma)i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha^2 + 3\alpha + \beta^2 + 2\gamma + \alpha\gamma - 2 = 0 & \text{(1)} \\ \beta - \beta\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \beta\gamma = \beta \quad \begin{matrix} \beta \neq 0 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \gamma = 1.$$

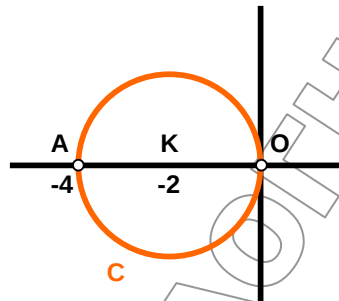
Άρα $z_2 - z_1 = 1$.

β. (1) $\stackrel{\gamma=1}{\Rightarrow} \alpha^2 + 3\alpha + \beta^2 + 2 + \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha = 0$

$C: x^2 + y^2 + 4x = 0$

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16 > 0$

άρα ο C είναι κύκλος
με κέντρο $K(-2, 0)$
και ακτίνα $\rho = 2$.



Είναι $z_1 = \alpha + \beta i$ και $\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha = 0$,

άρα η εικόνα του z_1 κινείται στον κύκλο C .

Τα σημεία $A(-4, 0)$ και $O(0, 0)$ εξαιρούνται διότι $\beta \neq 0$.

Άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι

ο κύκλος C χωρίς τα σημεία A και O .

γ. $z_1^2 = (\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i$

$z_1^2 \in I \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1^2) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2$
και επειδή $\alpha\beta > 0$, θα είναι $\alpha = \beta$ **(2)**.

Είναι $\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 4\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha(\alpha + 2) = 0$
και επειδή $\alpha\beta > 0$, θα είναι $\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$.

Από (2) έχουμε $\alpha = \beta = -2$, άρα $z_1 = -2 - 2i$.

$$\begin{aligned} (z_1 + 1 + i)^{20} &= (-2 - 2i + 1 + i)^{20} = (-1 - i)^{20} = (1 + i)^{20} \\ &= [(1 + i)^2]^{10} = (2i)^{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\bar{z}_1 + 1 - i)^{20} &= (-2 + 2i + 1 - i)^{20} = (-1 + i)^{20} = (1 - i)^{20} \\ &= [(1 - i)^2]^{10} = (-2i)^{10} = (2i)^{10} \end{aligned}$$

Άρα $(z_1 + 1 + i)^{20} - (\bar{z}_1 + 1 - i)^{20} = (2i)^{10} - (2i)^{10} = 0$.