

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.
1. θεωρία σελ 224 σχολικού βιβλίου
 2. θεωρία σελ 149 σχολικού βιβλίου
- B.
1. ΛΑΘΟΣ
 2. ΣΩΣΤΟ
 3. ΣΩΣΤΟ
 4. ΣΩΣΤΟ
 5. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ 2^ο

α) Έστω $z = x + yi$

$$\text{Ισχύει: } \begin{cases} x = \lambda - 2 \\ y = 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x + 2 \\ \lambda = \frac{y}{2} \end{cases}$$

$$\text{Άρα } y = 2(x + 2) \Leftrightarrow y = 2x + 4$$

Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι τα σημεία της ευθείας $y = 2x + 4$

β)

• ισχύει:

$$z + \bar{z} = 2$$

$$2 \operatorname{Re}(z) = 2$$

$$\operatorname{Re}(z) = 1$$

$$\lambda - 2 = 1$$

$$\lambda = 3$$

• Για $\lambda = 3$ έχουμε $z = 1 + 6i$ και

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 + 6i} = \frac{1 - 6i}{(1 + 6i)(1 - 6i)} = \frac{1 - 6i}{1^2 + 6^2} = \frac{1 - 6i}{37} = \frac{1}{37} - \frac{6}{37}i$$

$$\text{Άρα } \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{37}$$

γ) Επειδή $|z| = 2$ έχουμε :

$$|z|^2 = 4$$

$$(\lambda - 2)^2 + (2\lambda)^2 = 4$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 + 4\lambda^2 = 4$$

$$5\lambda^2 - 4\lambda = 0$$

$$\lambda(5\lambda - 4) = 0$$

$$\lambda = 0 \text{ απορρίπτεται} \quad \text{ή} \quad \lambda = \frac{4}{5} \text{ δεκτή}$$

• Για $\lambda = 0$ είναι $\text{Im}(z) = 0$. Από την υπόθεση όμως $\text{Im}(z) \neq 0$. Άρα η τιμή $\lambda = 0$ απορρίπτεται.

$$\text{Οπότε } \lambda = \frac{4}{5}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

$$\alpha) f'(x) = \left(\frac{4}{x}\right)' = -\frac{4}{x^2}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{4}{x^2}}{\frac{4}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \cdot \frac{4}{x}}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{(x-2)^2} = +\infty$$

β)

• Έστω $M(x, f(x))$ ένα σημείο της C_f και $g(x)$ η απόσταση των σημείων O και M .
Ισχύει:

$$g(x) = (OM) = \sqrt{x^2 + f^2(x)} = \sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}} \quad [x > 0 \text{ από την υπόθεση}]$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} \cdot \left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right)' = \frac{2x - \frac{32}{x^3}}{2\sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}} = \frac{x^4 - 16}{x^3 \sqrt{x^2 + \frac{16}{x^2}}}$$

•

$$g'(x) = 0$$

$$x^4 - 16 = 0$$

$$x^4 = 16$$

$$x = 2 \text{ ή } x = -2 \quad \text{Απορρίπτεται}$$

$$\text{άρα } x = 2$$

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	○	+
$g(x)$			

ΟΛ.ΕΛ.

Παρατηρώ ότι για $x = 2$ η απόσταση g γίνεται ελάχιστη.

Άρα $x = 2$ δηλαδή $M(2, 2)$

γ) Πρέπει

$$\lambda_e = -2$$

$$f'(x_0) = -2$$

$$-\frac{4}{x_0^2} = -2$$

$$x_0$$

$$x_0 = \sqrt{2} \quad [x > 0]$$

$$\text{Για } x_0 = \sqrt{2} \text{ έχουμε } f(\sqrt{2}) = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ είναι η μοναδική εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -2x + 6$.

ΘΕΜΑ 4^ο

α)

• Ισχύει $xf(x) = x + 2\eta\mu x$

$$f(x) = 1 + 2 \frac{\eta\mu x}{x} \quad [\text{διαιρώ με } x \neq 0] \quad (1)$$

• Επειδή η f συνεχής στο $\mathbb{R}$, ισχύει.

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 2 \frac{\eta\mu x}{x}\right) = 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

$$\text{άρα } f(0) = 3$$

β)

$$f(x) < 3$$

$$1 + 2 \frac{\eta\mu x}{x} < 3 \quad (1)$$

$$2 \frac{\eta\mu x}{x} < 2$$

$$\frac{\eta\mu x}{x} < 1$$

$$\eta\mu x < x \quad [x > 0]$$

Η παραπάνω ανισότητα ισχύει (δες σχ. βιβλίο σελ 170)

$$\text{Άρα } f(x) < 3 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

γ) Έστω

$$g(x) = f(x) - 2$$

$$g(x) = 1 + 2 \frac{\eta \mu x}{x} - 2$$

$$g(x) = 2 \frac{\eta \mu x}{x} - 1 \quad \mu \epsilon \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$$

Εφαρμόζουμε Θ. Bolzano για την g στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$

• Η g συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ ως διαφορά συνεχών

$$\bullet \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \frac{\eta \mu \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} - 1 = 2 \frac{1}{\frac{\pi}{2}} - 1 = \frac{4}{\pi} - 1 = \frac{4 - \pi}{\pi} > 0$$

$$g(\pi) = 2 \frac{\eta \mu \pi}{\pi} - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$$

$$\acute{\alpha} \rho \alpha \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot g(\pi) < 0$$

οπότε υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της $g(x) = 0$ στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, δηλαδή η

εξίσωση $f(x) = 2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$