

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
 ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
 ΣΑΒΒΑΤΟ 27 ΜΑΪΟΥ 2006**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1 Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 253

A.2 Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 273

B. $\alpha \rightarrow \Lambda, \beta \rightarrow \Sigma, \gamma \rightarrow \Sigma, \delta \rightarrow \Lambda, \varepsilon \rightarrow \Sigma$

ΘΕΜΑ 2^ο

α. $f'(x) = 2 \cdot (x-2) > 0$ για κάθε $x > 2$

Άρα η f γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty) \Rightarrow$ η f «1-1»

β. Αφού η f «1-1» υπάρχει η αντίστροφη και έχουμε:

$$\psi = f(x) \Leftrightarrow \psi = 2 + (x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = \psi - 2 \text{ [πρέπει } \psi - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \psi \geq 2 \text{]} \Leftrightarrow x-2 = \pm \sqrt{\psi-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{\psi-2}$$

Αλλά $x \geq 2 \rightarrow 2 + \sqrt{\psi-2} \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{\psi-2} \geq 0$ ισχύει για κάθε $\psi \in \mathbb{R}$

ή $2 - \sqrt{\psi-2} \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{\psi-2} \leq 0$ ισχύει μόνο για $\psi=2$

Άρα $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-2}$ με Π.ο. $[2, +\infty)$

γ. Έχουμε το σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} \psi = x \\ \psi = f(x) \end{array} \right| \Leftrightarrow 2 + (x-2)^2 = x$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = 2, \quad x = 3$$

Τα κοινά σημεία της f και της $\psi = x$ είναι $A(2,2)$ $B(3,3)$

Επειδή η f γίνεται αύξουσα λόγω συμμετρίας, τα κοινά σημεία των f^{-1} και $\psi = x$ είναι τα A, B

- δ. Λόγω συμμετρίας, θα βρω το εμβαδό που περικλείεται μεταξύ της f και της $\psi = \chi$ οπότε ζητούμενο εμβαδό θα είναι το διπλάσιο.

Είναι

$$f(\chi) - \chi \geq 0 \Leftrightarrow 2 + (\chi - 2)^2 - \chi \geq 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 5\chi + 6 \geq 0$$

2	3
+	-
	+

$$\text{Άρα } E(\Omega) = \int_2^3 |2 + (\chi - 2)^2 - \chi| d\chi = \int_2^3 (\chi - 2 - (\chi - 2)^2) d\chi =$$

$$= \int_2^3 (-\chi^2 + 5\chi - 6) d\chi = \left[-\frac{\chi^3}{3} + 5\frac{\chi^2}{2} - 6\chi \right]_2^3$$

$$= \frac{1}{6} \text{ Το ζητούμενο εμβαδό είναι } 2 \cdot E(\Omega) = \frac{1}{3}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

- α. i. Είναι $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2 - z_3, \quad z_2 = -z_1 - z_3$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } |z_1 - z_2| &= |z_3 - z_1| \Leftrightarrow |-z_2 - z_3 - z_1| = |z_3 + z_2 + z_3| \\ &\Leftrightarrow |-2z_1 - z_3| = |2z_2 + z_3| \Leftrightarrow |2z_2 + z_3| = |2z_3 + z_2| \\ 4z_2z_3 + 2z_2\bar{z}_3 + 2z_2z_3 + z_3\bar{z}_3 &= 4z_3\bar{z}_3 + 2\bar{z}_2z_3 + 2z_2\bar{z}_3 + z_2\bar{z}_2 \\ &\rightarrow 4 + 1 = 4 + 1 \text{ ισχύει} \end{aligned}$$

$$\text{Διότι } |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 = z_2\bar{z}_2 = z_3\bar{z}_3 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Ομοίως } |z_1 - z_2| &= |z_2 - z_3| \Leftrightarrow |z_1 + z_1 + z_3| = |-z_1 - z_3 - z_3| \\ &\Leftrightarrow |2z_1 + z_3| = |-z_1 - 2z_3| \Leftrightarrow |2z_1 + z_3| = |z_1 + 2z_3| \end{aligned}$$

Και καταλήγουμε ότι $4+1=4+1$ που ισχύει

- ii. Από τριγ. Ανισότητα έχουμε:

$$|z_1 - z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$\text{Είναι } |z_1 - z_2|^2 \leq 4 \Leftrightarrow (z_1 - z_2) \cdot (\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \leq 4$$

$$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_2 \leq 4 \rightarrow z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 \geq -2$$

$$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} \geq -2$$

$$\text{Δηλαδή } 2 \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq -2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq -1$$

- β. Επειδή $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ οι εικόνες $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ των z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα, ανήκουν σε κύκλο με $K(0,0), \rho=1$ δηλαδή $C: \chi^2 + \psi^2 = 1$

$$\text{Είναι } |z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3| \Leftrightarrow (AB) = (\Gamma A) = (B\Gamma)$$

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο εγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο.

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Πρέπει $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq 1$

Άρα $D_f = (0,1) \cup (1,+\infty)$

$$\text{Έχουμε } f'(x) = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} = \frac{-2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} < 0$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο D_f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	-
$f(x)$			

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = -1 - (-\infty) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = \frac{2}{0^-} - 0 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = \frac{2}{0^+} - 0 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = 1 - (+\infty) = -\infty$$

Άρα Σ.Τ: $(-\infty, +\infty)$

β. Στο $(0,1)$ το Σ.Τ είναι $(-\infty, +\infty)$ όπου περιέχεται το 0 άρα έχω μία τουλάχιστον ρίζα. Επειδή όμως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$ η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Ομοίως στο $(1,+\infty)$ το σύνολο τιμών είναι $(-\infty, +\infty)$ όπου περιέχεται το 0 άρα έχω μία τουλάχιστον ρίζα. Επειδή όμως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$ η ρίζα αυτή είναι μοναδική. Άρα έχουμε δυο ακριβώς ρίζες.

γ. Η εξίσωση εφαπτομένης της g στο $A(\alpha, \ln \alpha)$ είναι $\psi - g(\alpha) = g'(\alpha)(x - \alpha)$

$$\psi - \ln \alpha = \frac{1}{\alpha}(\chi - \alpha) \Rightarrow \psi - \ln \alpha = \frac{1}{\alpha}\chi - 1 \Rightarrow \psi = \frac{1}{\alpha}\chi + \ln \alpha - 1$$

Η εξίσωση εφαπτομένης της h στο $B(\beta, e^\beta)$ είναι $\psi - h(\beta) = h'(\beta)(\chi - \beta)$

$$\psi - e^\beta = e^\beta(\chi - \beta) \Rightarrow \psi - e^\beta = e^\beta\chi - \beta e^\beta \Leftrightarrow \psi = e^\beta\chi + e^\beta - \beta e^\beta$$

$$\text{Για να ταυτίζονται πρέπει } \frac{1}{\alpha} = e^\beta \Leftrightarrow \ln \frac{1}{\alpha} = \ln e^\beta \Leftrightarrow \beta = -\ln \alpha \quad (2)$$

$$\text{Και } \ln \alpha - 1 = e^\beta - \beta e^\beta \quad (3)$$

Για να είναι 0 η ρίζα της $f(x) = 0$ πρέπει

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha+1 = (\alpha-1) \ln \alpha \quad (4)$$

Η (3) λόγω των (1) και (2) γίνεται:

$$\ln \alpha - 1 = \frac{1}{\alpha} + \ln \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha \ln \alpha - \alpha = 1 + \ln \alpha$$

$$\alpha \ln \alpha - \ln \alpha = \alpha + 1$$

$$(\alpha-1) \ln \alpha = \alpha+1 \quad \text{Άρα ισχύει η (4)}$$

- δ. Επειδή οι σχέσεις του ερωτ. γ) ισχύουν και αντίστροφα προκύπτει ότι οι 2 ακριβώς ρίζες της f δίνουν δύο ακριβώς κοινές εφαπτομένες.

Επιμέλεια απαντήσεων:
Γκιούλος Θεόδωρος – Μαθηματικός
Ρούτσης Θανάσης – Μαθηματικός
Φροντιστήριο Μ.Ε «ΕΠΙΛΟΓΗ» - Καλαμάτα
<http://www.epil.gr>