

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ 1°

A.1 Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$.

Αν

- η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και
- $f(α) \neq f(β)$

δείξτε ότι για κάθε αριθμό n μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (α, β)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = n$.

Μονάδες 9

A.2 Πότε η ευθεία $y = λx + β$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ με $f(α) < 0$ και υπάρχει $ξ \in (α, β)$ ώστε $f(ξ) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(β) > 0$.

Μονάδες 2

β. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Μονάδες 2

γ. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} .

Μονάδες 2

δ. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Μονάδες 2

ε. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ , τότε ισχύει

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x) - f(a) \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Μονάδες 2

στ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

α. Δείξτε ότι: $\frac{1}{z_1} = \frac{\bar{z}_1}{z_1 \cdot \bar{z}_1}$

Μονάδες 7

β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\frac{z_1 + z_2}{z_2 \cdot \bar{z}_1}$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 9

γ. Δείξτε ότι $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3} |z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$.

α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 3

β. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y = \lambda e x$.
Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής M .

Μονάδες 7

γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , της εφαπτομένης της στο σημείο M και του άξονα $y'y$, είναι

$$E(\lambda) = \frac{e - 2}{2\lambda}$$

Μονάδες 8

δ. Υπολογίστε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta \mu \lambda}$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση $2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

α. Ναδειχθεί ότι: $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$

Μονάδες 6

β. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta \mu x}$

Μονάδες 6

γ. Δίδονται οι συναρτήσεις:

$$h(x) = \int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t) dt \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^{2007}}{2007}$$

Δείξτε ότι $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

δ. Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t) dt = \frac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(0, 1)$

Μονάδες 6

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**