

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΕΕ

ΘΕΜΑ 1ο

α)

Αριθμός παιδιών	Συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα	Σχ. Συχνότητα (%) f_i
0	4	4	16
1	7	11	28
2	5	16	20
3	4	20	16
4	3	23	12
5	2	25	8
Αθροίσματα	25		100

β) Η επικρατούσα τιμή είναι 1 αφού έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα.

γ) Αφού το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 25 διάμεσος είναι η 13η παρατήρηση δηλ. η 2.

δ) Τρία παιδιά έχουν 16% των οικογενειών.

ε) Μέχρι δύο παιδιά έχουν $\frac{(4+11+16) \cdot 100}{25} = 64\%$ οικογένειες.

ΘΕΜΑ 2ο

α) Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 9^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{2x-18}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{(2x-18)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{2(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x})^2 - 3^2} = \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{2(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} = \lim_{x \rightarrow 9^+} 2 \cdot (\sqrt{x}+3) = \\
 &= 2(\sqrt{9}+3) = 2(3+3) = 12
 \end{aligned}$$

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 9^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9^-} (\lambda x + 3) = 9\lambda + 3$.

γ) Η f είναι συνεχής στο $x_0=9$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow 9^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9^+} f(x) = f(9)$$

δηλαδή

$$9\lambda + 3 = 12 = 9\lambda + 3 \quad \text{ή} \quad 9\lambda + 3 = 12 \quad \text{ή} \quad 9\lambda = 9.$$

Άρα $\lambda = 1$.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Η συνάρτηση f ως πολυωνυμική είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σ' όλο το $\mathbb{R}$, με παράγωγο

$$f'(x) = (2x^3 - 9x^2 + ax + \beta)' = 6x^2 - 18x + a.$$

β)

- Επειδή $f'(1) = 0$, έχουμε

$$6 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + a = 0 \quad \text{ή} \quad 6 - 18 + a = 0 \quad \text{ή} \quad a = 18 - 6.$$

$$\text{Άρα } a = 12.$$

Για την τιμή $a = 12$ ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + \beta$$

- Επειδή τώρα είναι $f(2) = 5$, έχουμε

$$2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + \beta = 5 \quad \text{ή} \quad 16 - 36 + 24 + \beta = 5 \quad \text{ή} \quad \beta = 5 - 16 + 36 - 24$$

$$\text{Άρα } \beta = 1.$$

γ) Για τις τιμές $a = 12$ και $\beta = 1$ ο τύπος της $f(x)$ γράφεται

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 12x + 1.$$

Οπότε

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-1)(x-2).$$

Από την εξίσωση $f'(x) = 0$ έχουμε $6(x-1)(x-2) = 0$

$$\text{Άρα } x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 2$$

Κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	○	+
$f(x)$		↗	↘	↗

Επομένως η f είναι

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 2]$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 4ο

- α)** Αφού το άθροισμα του μήκους και του πλάτους του οικοπέδου είναι 200 μέτρα και με δεδομένο ότι το μήκος είναι x μέτρα, προκύπτει ότι το πλάτος θα ήταν $(200 - x)$ μέτρα. Επομένως, το εμβαδόν θα είναι:

$$E(x) = x(200 - x) = -x^2 + 200x.$$

- β)** Παραγωγίζοντας την $E(x)$ έχουμε:

$$E'(x) = -2x + 200 = -2(x - 100), \quad 0 < x < 200.$$

Είναι:

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 100$$

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 100$$

$$E'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 100 < 200$$

Η $E(x)$ επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 100]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[100, 200)$. Άρα γίνεται μέγιστη όταν $x = 100$ μέτρα.

- γ)** Η μέγιστη τιμή του $E(x)$ είναι:

$$E(100) = -100^2 + 200 \cdot 100 = 20000 - 10000 = 10000 \text{ τ.μ.}$$