

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 24 ΜΑΪΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** του παρακάτω πίνακα και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ**, έτσι ώστε να προκύπτει η σωστή αντιστοίχιση. (Δύο στοιχεία της **Στήλης ΙΙ** περισσεύουν).

Στήλη Ι Είδος κωνικής τομής	Στήλη ΙΙ Εξίσωση γραμμής
α. Παραβολή	1. $x^2 + y^2 = \rho^2, \rho > 0$
β. Κύκλος	2. $x + y = \alpha, \alpha \neq 0$
γ. Υπερβολή	3. $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \alpha, \beta > 0$
δ. Έλλειψη	4. $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \alpha, \beta > 0$
	5. $y^2 = 2px, p > 0$
	6. $x^3 = \beta y^2, \beta \neq 0$

Μονάδες 4

Για κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις **Β.** και **Γ.**, να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (**Σ**), αν αυτή είναι **Σωστή** ή (**Λ**), αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.

Β. Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου, που σχηματίζουν γωνία θ , τότε ισχύει:

$$\cos \theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}.$$

Μονάδες 3

Γ. Αν μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , τότε η εξίσωσή της είναι:

$$y = \lambda x + \beta, \quad \text{με } \beta \neq 0.$$

Μονάδες 3

Δ. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ και $\vec{\gamma} = (x_3, y_3)$. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \quad (\text{Επιμεριστική ιδιότητα}).$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 , με εξισώσεις $\varepsilon_1: 3x - 2y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2: 2x + 3y - 8 = 0$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε_1 είναι κάθετη στην ευθεία ε_2 .

Μονάδες 5

β) Υποθέτουμε ότι το σημείο $A(\alpha, 2)$ ανήκει στην ευθεία ε_1 και το σημείο $B(-5, \beta)$ ανήκει στην ευθεία ε_2 .

β1) Να βρείτε τις τιμές των α και β .

Μονάδες 6

β2) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $3x - y + 3 = 0$.

Μονάδες 6

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{\alpha}|=3, |\vec{\beta}|=2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta})=\frac{\pi}{3} \text{ και } \vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}=\vec{0}.$$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

Μονάδες 8

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τους θετικούς αριθμούς x , για τους οποίους ισχύει η σχέση $(\vec{\alpha} + x\vec{\beta}) \cdot (2\vec{\alpha} - x\vec{\beta}) = 17$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy στο επίπεδο, δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 4x - 2\lambda y = 0, \quad (1)$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ , η γραμμή που παριστάνει η εξίσωση (1) διέρχεται από την αρχή O των αξόνων.

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι, για τις διάφορες τιμές του λ , η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(2, \lambda)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{\lambda^2 + 4}$.

Μονάδες 5

γ) Για $\lambda = 2$, να αποδείξετε ότι ο κύκλος, που ορίζεται από την εξίσωση (1), τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ σε σημεία A και B αντίστοιχα, διαφορετικά από την αρχή O , τέτοια ώστε το τρίγωνο OAB να είναι ισοσκελές.

Μονάδες 8

- δ) Για $\lambda = 2$, να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = -x$ εφάπτεται στον κύκλο, που ορίζεται από την εξίσωση (1), στο σημείο $O(0, 0)$.

Μονάδες 7

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ