

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ:

ΘΕΜΑ 1ο

A. Θεωρία από το σχολικό βιβλίο

B. $A \rightarrow 3$

$B \rightarrow 4$

$\Gamma \rightarrow 1$

$\Delta \rightarrow 2$

Γ. $\rightarrow \Sigma$

Δ. $\rightarrow \Lambda$

Ε. $\rightarrow \Lambda$

ΣΤ. $\rightarrow \Sigma$

ΘΕΜΑ 2ο

α. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

• $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4x^2 + 3) = 7$

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (6x + \kappa) = 6 + \kappa$

$f(1) = 6 + \kappa$ Άρα $6 + \kappa = 7 \Leftrightarrow \kappa = 1$

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ με $f'(x) = 8x$

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο A είναι:

$\psi - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \quad f(-1) = 4 + 3 = 7$

$\psi - 7 = -8(x + 1) \quad f'(-1) = -8$

$\psi - 7 = -8x - 8$

$\psi = -8x - 1$

γ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ με $f'(x) = 8x$

Άρα $f'(-5) = -40$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $f'(x) = 6$

Άρα $f'(5) = 6$

Επομένως: $\mu \cdot f'(-5) + f'(5) + 34 = 0 \Leftrightarrow$

$\mu \cdot (-40) + 6 + 34 = 0$

$-40 \cdot \mu + 40 = 0$

$\mu = 1$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=6x^2-6x+6\alpha$
 Επειδή η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=-2$

$$\begin{aligned}
 \text{άρα } f'(-2) &= 0 \Leftrightarrow \\
 6(-2)^2 - 6(-2) + 6\alpha &= 0 \Leftrightarrow \\
 24 + 12 + 6\alpha &= 0 \Leftrightarrow \\
 6\alpha &= -36 \\
 \alpha &= -6
 \end{aligned}$$

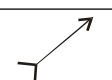
$$\begin{aligned}
 \text{Επίσης } f(-2) &= 98 \Leftrightarrow \\
 2(-2)^3 - 3(-2)^2 + 6\alpha(-2) + \beta &= 98 \Leftrightarrow \\
 -16 - 12 - 12 \cdot (-6) + \beta &= 98 \Leftrightarrow \\
 44 + \beta &= 98 \\
 \beta &= 54
 \end{aligned}$$

β. $f(x)=2x^3-3x^2-36x+54$, $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 \text{Η } f \text{ παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με} \\
 f'(x) &= 6x^2 - 6x - 36 \\
 &= 6(x^2 - x - 6)
 \end{aligned}$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix}$$

	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2]$ και στο $[3, +\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 3]$.

γ. Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -2 και η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 3 .

δ. Η f συνεχής στο $[-1, 2]$ ως πολυωνυμική

$$\begin{aligned}
 f(-1) &= 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 36 + 54 = \\
 &= -2 - 3 + 36 + 54 = 85 > 0 \\
 f(2) &= 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 + 54 = \\
 &= 16 - 12 - 72 + 54 = -14 < 0
 \end{aligned}$$

Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 2)$ της εξίσωσης $f(x) = 0$

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,2]$ η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ 4^ο

$$\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 i = \alpha + (1-\alpha)i$$

$$\left(\frac{x+\psi i+x-\psi i}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+\psi i-x+\psi i}{2i}\right)^2 i = \alpha + (1-\alpha)i$$

$$x^2 + \psi^2 i = \alpha + (1-\alpha)i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \alpha \\ \psi^2 = 1-\alpha \end{cases}$$

α. Αν $\text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \psi = 0$ τότε έχουμε $1-\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 1$

β. Αν $\alpha = 0$ τότε $\begin{cases} x^2 = 0 \\ \psi^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \psi = \pm 1 \end{cases}$

$$\text{Άρα } z^2 + 1 = (x + \psi i)^2 + 1 = i^2 + 1 = 0$$

γ. Είναι $x^2 = \alpha$, άρα $\alpha \geq 0$

Είναι $\psi^2 = 1-\alpha$, άρα $1-\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha \leq 1$

Επομένως $0 \leq \alpha \leq 1$

δ. Είναι $\begin{cases} x^2 = \alpha \\ \psi^2 = 1-\alpha \end{cases}$

$$\text{Άρα } x^2 + \psi^2 = 1$$

Επομένως οι εικόνες M των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$