

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 5 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Θεωρία βιβλίου σελίδα 213

B. $\alpha \rightarrow 3$, $\beta \rightarrow 1$, $\gamma \rightarrow 4$

Γ. $\alpha \rightarrow \text{Λάθος}$, $\beta \rightarrow \text{Λάθος}$, $\gamma \rightarrow \text{Σωστό}$, $\delta \rightarrow \text{Σωστό}$,

ΘΕΜΑ 2^ο

α. $\varphi_v = 150^\circ \Leftrightarrow$

$$180^\circ - \frac{360^\circ}{v} = 150^\circ \Leftrightarrow$$

$$\frac{360^\circ}{v} = 30^\circ \Leftrightarrow v = \frac{360^\circ}{30^\circ} \Leftrightarrow v = 12 \text{ πλευρές}$$

β. $\omega_{12} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$

γ. α' τρόπος

Έστω (OAB) το εμβαδό τριγώνου που σχηματίζεται από δύο διαδοχικές ακτίνες και μία πλευρά AB του πολυγώνου

$$\text{Είναι: } (OAB) = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2} R^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} R^2$$

$$\text{Άρα } E_{12} = 12(OAB) = 3R^2 \text{ τ.μον.}$$

β' τρόπος (Σύμφωνα με εφαρμογή 3 σελ. 241 έχω)

$$\lambda_{12}^2 = 2R(R - \alpha_6) = 2R \left(R - \frac{R\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 2R \frac{R(2 - \sqrt{3})}{2} = R^2(2 - \sqrt{3})$$

$$\text{Είναι } \alpha_{12}^2 + \frac{\lambda_{12}^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow \alpha_{12}^2 = R^2 - \frac{R^2(2 - \sqrt{3})}{4} \Leftrightarrow \alpha_{12}^2 = \frac{R^2(2 + \sqrt{3})}{4}$$

$$\text{Άρα } E_{12} = \frac{1}{2} P_{12} \cdot a_{12} = \frac{1}{2} \cdot 12R\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = 3R^2\sqrt{4-3} = 3R^2 \text{ τ.μον}$$

γ' τρόπος

Έστω (ΟΑΒΓ) το εμβαδόν τετραπλεύρου που σχηματίζεται από δύο διαδοχικές πλευρές του πολυγώνου και δύο ακτίνες. Είναι $ΑΓ \perp ΟΒ$.

$$\text{Είναι: } (ΟΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΟΒ \cdot ΑΓ = \frac{1}{2} R \lambda_6 = \frac{1}{2} R^2$$

$$\text{Άρα } E_{12} = 6(ΟΑΒΓ) = 6 \cdot \frac{1}{2} R^2 = 3R^2 \text{ τ.μον}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Είναι: $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \beta \gamma \eta \mu \hat{A} \Leftrightarrow \frac{\beta \gamma \sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2} \beta \gamma \eta \mu \hat{A} \Leftrightarrow \eta \mu \hat{A} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 45^\circ$

Από το νόμο συν/τόνων έχουμε:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos \hat{A}$$

$$\alpha^2 = (1+\sqrt{2})^2 + 2^2 - 2(1+\sqrt{2}) \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha^2 = 1+2+2\sqrt{2}+4-2\sqrt{2}-4$$

$$\alpha^2 = 3 \text{ οπότε } \alpha = \sqrt{3}$$

β. Είναι :

$$(ΑΒΓ) = \frac{\alpha \beta \gamma}{4R} \Leftrightarrow \frac{\beta \gamma \sqrt{2}}{4} = \frac{\alpha \beta \gamma}{4R} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{\alpha}{R} \Leftrightarrow R = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

γ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ εφαρμόζουμε γενίκευση πυθαγορείου θεωρήματος για τη γωνία Β (οξεία γωνία).

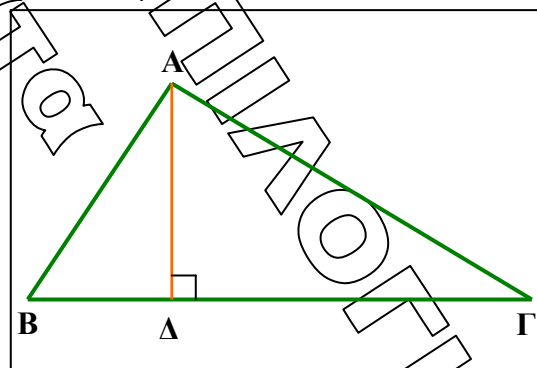
$$\text{Αν } ΑΔ \perp ΒΓ \text{ έχουμε } \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha \beta \Delta$$

$$(1+\sqrt{2})^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\beta \Delta \Rightarrow$$

$$1+2\sqrt{2}+2 = 4+3-2\sqrt{3}\beta \Delta \Rightarrow$$

$$\sqrt{3}\beta \Delta = 2-\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\beta \Delta = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{2})}{3} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}$$

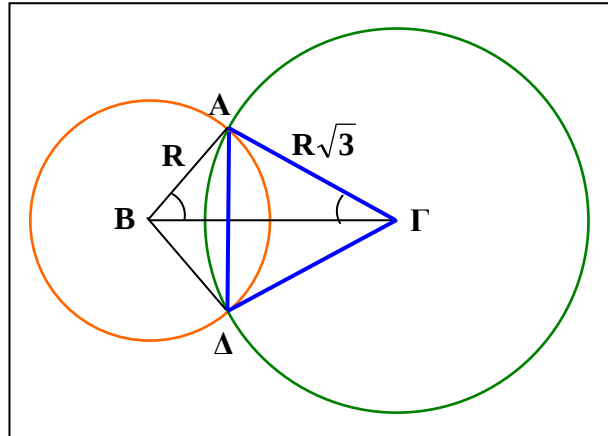


ΘΕΜΑ 4^ο

α. Με Πυθ. Θεώρημα στο $\triangle AB\Gamma$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 B\Gamma^2 &= AB^2 + A\Gamma^2 = R^2 + \\
 (R\sqrt{3})^2 &= R^2 + 3R^2 = 4R^2 \Leftrightarrow \\
 B\Gamma &= 2R
 \end{aligned}$$

β. Επειδή $AB = \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$
 οπότε $\hat{B} = 60^\circ$



γ. $(AB\Delta\Gamma) = 2(AB\Gamma) = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = AB \cdot A\Gamma = R \cdot R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}\tau.\mu\omicron\nu$

δ.

$$\begin{aligned}
 \tau_1 + \tau_2 &= \left(\widehat{\Gamma\Delta A} \right) - \left(\widehat{A\Gamma\Delta} \right) + \left(\widehat{BA\Delta} \right) - \left(\widehat{AB\Delta} \right) = \\
 &= \frac{\pi R^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \eta\mu 120^\circ + \frac{\pi (R\sqrt{3})^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} (R\sqrt{3})^2 \cdot \eta\mu 60^\circ \\
 &= \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{\pi R^2}{2} - \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} \\
 &= \frac{4\pi R^2 - 3\sqrt{3}R^2 + 6\pi R^2 - 9\sqrt{3}R^2}{12} \\
 &= \frac{10\pi R^2 - 12\sqrt{3}R^2}{12} = \frac{5\pi R^2 - 6\sqrt{3}R^2}{6} = R^2 \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}
 \end{aligned}$$