

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 29 ΜΑΪΟΥ 2003

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
 ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Θεωρία σχολικού σελ. 217

B. Θεωρία σχολικού σελ. 247

Γ. $\alpha \rightarrow$ Σωστό, $\beta \rightarrow$ Σωστό, $\gamma \rightarrow$ Σωστό, $\delta \rightarrow$ Λάθος, $\varepsilon \rightarrow$ Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

α. $w = 3\alpha + 3\alpha\beta i - i(\alpha - \beta i) + 4 = 3\alpha + 3\beta i - \alpha i - \beta + 4$
 $= 3\alpha - \beta + 4 + i(3\beta - \alpha)$
 Άρα $\text{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4$ και $\text{Im}(w) = 3\beta - \alpha$

β. Οι εικόνες του w είναι τα σημεία $M(3\alpha - \beta + 4, 3\beta - \alpha)$. Αφού ανήκουν στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 12$ έχω:

$$3\beta - \alpha = 3\alpha - \beta + 4 - 12 \Leftrightarrow 4\beta = 4\alpha - 8 \Leftrightarrow \beta = \alpha - 2.$$

Άρα τα σημεία $N(\alpha, \beta)$ που είναι εικόνες του z ανήκουν στην ευθεία $y = x - 2$

γ. Ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο είναι εκείνος όπου η εικόνα του K είναι τέτοια ώστε η OK να είναι κάθετη στην ευθεία $y = x - 2$

Η ευθεία OK έχει $\lambda = -1$ και εξίσωση $y = -x$

Οπότε λύνουμε το σύστημα
$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = -1$$

Άρα ο μιγαδικός είναι $z = 1 - i$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 5x^2 + 3x^2 + 1 > 0$ Άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

$$f''(x) = 20x^3 + 6x = 2x(10x^2 + 3)$$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x(10x^2 + 3) \geq 0 \Leftrightarrow x(10x^2 + 3) \Leftrightarrow x \geq 0$$

(αφού $10x^2 + 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$

Είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και $(1-1)$ οπότε η f έχει αντίστροφη.

β. Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$e^x \geq 1+x \Rightarrow e^x - x - 1 \geq 0$$

$$\text{Έστω } g(x) = e^x - x - 1, x \in \mathbb{R}$$

$$g'(x) = e^x - 1$$

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$		ελάχιστο	

Ελάχιστη τιμή $g(0) = 0$ Άρα $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1+x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Οπότε για $e^x \geq 1+x \Rightarrow f(e^x) \geq f(1+x)$ αφού f γνησίως αύξουσα.

γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $O(0,0)$ είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-0 = 1 \cdot x \Leftrightarrow y = x$$

που είναι ο άξονας συμμετρίας των f και f^{-1}

δ. $E = \int_0^3 |f^{-1}(x)| dx$

$$\text{Έστω } f^{-1}(x) = u \Rightarrow f(u) = x \Rightarrow f'(u) \cdot du = dx$$

$$\text{αν } x=0 \text{ το } f(u)=0 \Rightarrow u=0$$

$$\text{αν } x=3 \text{ το } f(u)=3 \Rightarrow u^5 + u^3 + u = 3 \Rightarrow u^5 + u^3 + u - 3 = 0$$

προφανώς ρίζα η $u=1$ που είναι μοναδική γιατί η $u^5 + u^3 + u - 3 = 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Άρα: } E = \int_0^1 |u| \cdot f'(u) du = \int_0^1 u(5u^4 + 3u^2 + 1) du = \int_0^1 (5u^5 + 3u^3 + u) du = \frac{25}{12}$$

ΘΕΜΑ 4ο

- α. Η f συνεχής στο $[\gamma, \delta]$ αφού είναι συνεχής στο $[a, \beta]$

$$f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$$

Ισχύει το θεώρημα Bolzano δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\gamma, \delta)$ ára και στο (a, β) τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

- β. Επειδή $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$, από θεώρημα μέγιστης - ελάχιστης τιμής υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ με $f(x_1) = \text{μέγιστο}$, $f(x_2) = \text{ελάχιστο}$ και αφού η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο θα είναι $f(x_1) > 0$, $f(x_2) < 0$

Άρα από Θ. Fermat θα είναι $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

Από Θ.Μ.Τ. για την f στο $[a, x_1]$, υπάρχει $\rho_1 \in (a, x_1)$ με

$$f'(\rho_1) = \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} = \frac{f(x_1)}{x_1 - a} > 0$$

Από Θ.Μ.Τ. για την f' στο $[\rho_1, x_1]$, υπάρχει $\xi_1 \in (\rho_1, x_1)$ με

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(\rho_1) - f'(x_1)}{\rho_1 - x_1} = \frac{f'(\rho_1)}{\rho_1 - x_1} < 0$$

Ομοίως από Θ.Μ.Τ. για την f στο $[a, x_2]$, υπάρχει $\rho_2 \in (a, x_2)$ με

$$f'(\rho_2) = \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a} = \frac{f(x_2)}{x_2 - a} < 0$$

Από Θ.Μ.Τ. για την f' στο $[\rho_2, x_2]$, υπάρχει $\xi_2 \in (\rho_2, x_2)$ ώστε

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(\rho_2) - f'(x_2)}{\rho_2 - x_2} = \frac{f'(\rho_2)}{\rho_2 - x_2} > 0$$

- γ. Αφού f' συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) < 0$ από θεώρημα Bolzano υπάρχει

$$\xi \in (\xi_1, \xi_2): f''(\xi) = 0$$

Άρα η f'' μηδενίζεται στο ξ και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του ξ οπότε το $(\xi, f(\xi))$ είναι σημείο καμπής.

Επιμέλεια απαντήσεων:
Γκιούλος Θεόδωρος - Μαθηματικός
Ρούτσης Θανάσης - Μαθηματικός
Φροντιστήριο Μ.Ε. "ΕΠΙΛΟΓΗ" - Καλαμάτα
<http://www.epil.gr>